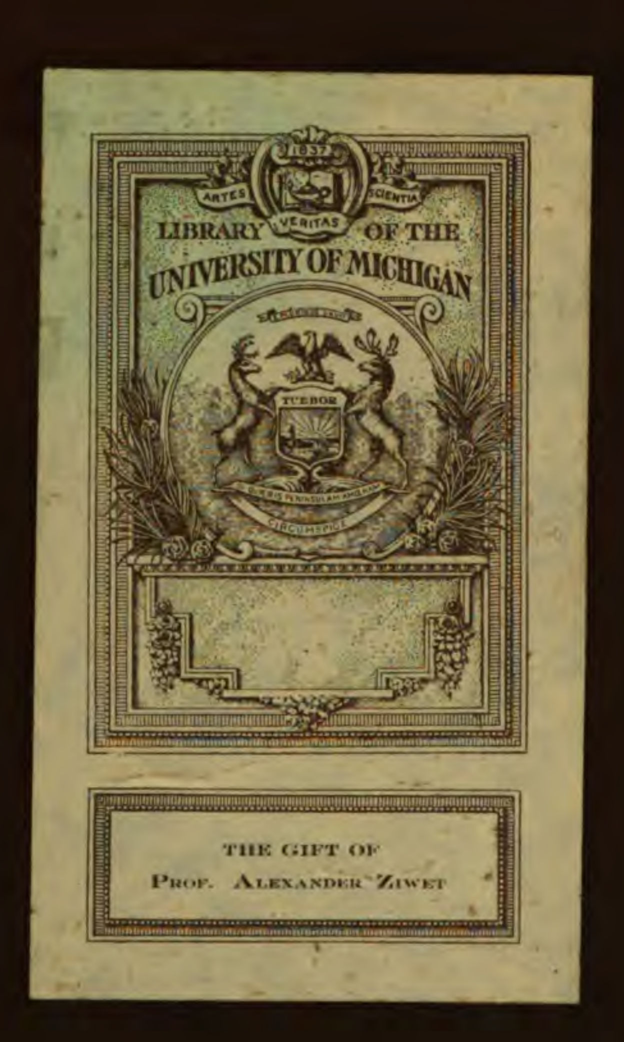
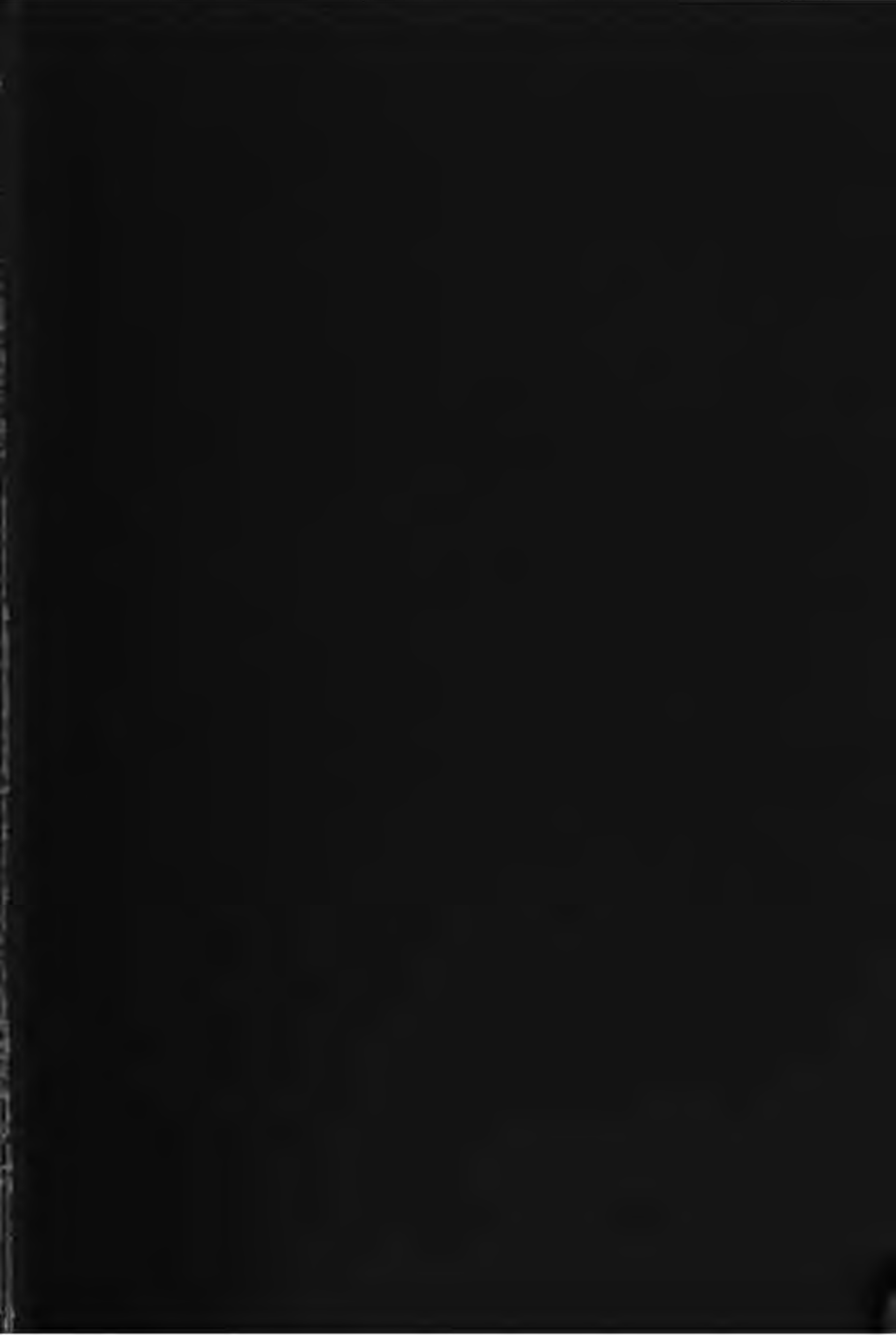
# HYDRODYNAMISCHE FERNKRÄFTE.

Band II.

VON

V. Bjerknes.


1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
CIRCUMSPICE
THE GIFT OF
PROF. ALEXANDER ZIWET



# VORLESUNGEN

ÜBER

# HYDRODYNAMISCHE FERNKRÄFTE

NACH

## C. A. BJERKNES' THEORIE

VON

V. BJERKNES,

PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT STOCKHOLM.

BAND II.

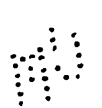
MIT SECHZIG FIGUREN IM TEXT UND AUF ZWEI TAFELN.



LEIPZIG,

VERLAG VON JOHANN AMBROSIUS BARTH.

1902.



Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

# BAND II.

## VERSUCHE ÜBER HYDRODYNAMISCHE FERNKRÄFTE.

## DIE ANALOGIE HYDRODYNAMISCHER ERSCHEINUNGEN MIT ELEKTRISCHEN ODER MAGNETISCHEN.

# Vorwort zum zweiten Bande.

Der hier vorliegende zweite Band von Vorlesungen über hydrodynamische Fernkräfte bildet die unmittelbare Fortsetzung des ersten. Er kann aber auch unabhängig als ein Buch für sich gelesen werden. Denn die Versuche, welche einerseits die Verifikation der im ersten Bande analytisch abgeleiteten Resultate bilden, geben auch für sich einen neuen, unabhängigen Eingang zu dem Studium des gesamten Erscheinungskomplexes. Aufserdem wird die vorausgeschickte elementare Ableitung die Versuche vollkommen verständlich machen, ohne dafs man auf die umständlicheren mathematischen Entwickelungen zurückzugreifen braucht.

Die Versuche rühren der Initiative nach alle von C. A. BJERKNES her. Mit der Konstruktion der mehr zusammengesetzten Instrumente und mit der praktischen Ausführung der Versuche hat er sich jedoch weniger beschäftigt. Dabei sind aber die ersten primitiven Versuche ausgenommen, die er zu Hause mit mir als gelegentlichem Gehilfen ausführte. Von 1876 an stellte sein Kollege, Professor SCHIÖTZ, die Hilfsmittel des physikalischen Institutes der Universität Christiania zur Verfügung und übernahm die praktische Leitung der Versuche. Vom Sommer 1878 bis Sommer 1880 war aufserdem ein besonderer Assistent, Herr cand. real. S. SVENDSEN

angestellt, der sich um die Konstruktion der ersten Instrumente und die Ausführung der ersten Versuche sehr verdient machte. Vom Sommer 1880 an hörte das Zusammenarbeiten mit Professor Schiötz auf. Mit Unterstützung des norwegischen Staates erhielt dann C. A. Bjerknes ein kleines eigenes Laboratorium für seine Versuche. Ich übernahm von da an die experimentelle und konstruktive Arbeit, und die Instrumente wurden von dem dafür besonders angestellten Mechaniker, Herrn J. L. Andersen, mit grofsem Geschick ausgeführt. Auch während der Ausarbeitung dieses Buches habe ich mich im mechanischen Institut der Universität Stockholm mit der weiteren Verbesserung der Instrumente und mit der Ausführung ergänzender Versuche beschäftigt.

Der letzte Teil dieses Bandes ist der Diskussion der Analogie der hydrodynamischen Erscheinungen mit den elektrostatischen oder den magnetischen gewidmet. Auch alle hier entwickelten Resultate rühren von C. A. Bjerknes selbst her. Ich habe aber wie früher in der Wahl der Darstellung vollkommen freie Hand gehabt, und habe diese Freiheit mehr als in den anderen Teilen des Buches benutzt. Die Diskussion der Analogie war nämlich eine schwierige Aufgabe in der Übergangsperiode, als sich die Faraday-Maxwell'schen Ideen Bahn brachen. Die Umwälzung war so grofs, dafs man nicht auf einmal die den neuen Ideen entsprechenden Darstellungsformen finden konnte, sondern gezwungen war, zum grofsen Teil mit den von der Fernwirkungslehre ererbten weiter zu arbeiten. Es zeigte sich aber, dafs alle Fortschritte, die in der Richtung einer reineren, den neuen Ideen besser entsprechenden Darstellung gemacht wurden, auch eine Erleichterung in der Diskussion der hier in Frage kommenden Analogie mit sich brachten. Diese neuen Darstellungsformen der Lehre von Elektricität und Magnetismus habe ich deshalb zu verwerten versucht, und dieses ist die Ursache, warum eine Reihe von Resultaten

hier äufserlich in anderer Form auftritt als der, in welcher sie C. A. Bjerknes anfangs gefunden hatte.

Eine besonders grofse Erleichterung hat die Einführung des Heaviside'schen rationellen Einheitssystems gebracht. Es ist sehr zu beklagen, dafs die internationalen Übereinkünfte über die elektrischen und magnetischen Einheiten eben in der unklaren Übergangszeit getroffen wurden, wo die den neuen Ideen entsprechenden äufseren Formen noch nicht gefunden waren. Wie man sich nun auch in der nächsten Zukunft zu dem Übergange zu den rationellen Einheiten in der physikalischen und elektrotechnischen Praxis stellen mag, so ist jedenfalls sicher, dafs die freie theoretische Forschung nicht auf die Vorteile verzichten kann, welche die Anwendung dieser Einheiten darbietet. Dafs sich diese Meinung verbreitet, darüber giebt das neulich erschienene verdienstvolle Lehrbuch von Emil Cohn über die Maxwell'sche Theorie ein erfreuliches Zeugnis. Und wenn das rationelle Einheitssystem somit schon in der Lehrbuchlitteratur vorzudringen anfängt, so kann ich um so weniger im Zweifel sein, das Richtige gewählt zu haben, wenn ich es in einem Spezialwerke zur Anwendung bringe, wo es die Lösung der gestellten Aufgabe aufserordentlich erleichtert.

Da ich aber somit die elektrischen und magnetischen Erscheinungen in einer Form beschreibe, welche doch wohl den meisten Lesern etwas fremd ist, so habe ich es für richtig gehalten, die betreffenden Teile der Lehrgebäude der Elektrostatik und des Magnetismus neu zu entwickeln, anstatt auf die getrennten Abhandlungen und Werke hinzuweisen, auf die ich mich wegen der Abweichungen von der traditionellen Form berufen konnte. Der dritte Teil dieses Bandes hat deshalb gewissermafsen die Form eines Lehrbuches der Elektrostatik und des Magnetismus erhalten, und dürfte als solches vielleicht an sich ein gewisses Interesse haben, vor allem wegen der Anschaulichkeit, welche man den sonst so

abstrakten Theorien durch Hinzuziehen des hydrodynamischen Bildes geben kann.

Herrn Dr. F. Kirchner in Leipzig bin ich auch dieses Mal zu vielem Danke verpflichtet für seine Unterstützung bei der Richtigstellung des deutschen Textes und bei der Korrektur.

Zuletzt ist es mir auch eine angenehme Pflicht, Verleger und Druckerei für die würdige Ausstattung des Werkes und für die sorgfältige Ausführung von Satz und Figuren meinen besten Dank auszusprechen.

Stockholm 1902.

**V. Bjerknes.**

# Inhalt.

## Erster Teil.

### Elementare Ableitung der hydrodynamischen Fernkräfte.

#### Erster Abschnitt.

#### Die qualitativen Gesetze der hydrodynamischen Fernkräfte.



#### Zweiter Abschnitt.

#### Quantitative Formulierung der Resultate.

## Zweiter Teil.

### Versuche über hydrodynamische Fernkräfte.

#### Erster Abschnitt.

#### Versuche mit Kugeln, welche an der Oberfläche von Wasser auf- und niedertauchen.



#### Zweiter Abschnitt.

#### Versuche mit Kugeln, welche unter Wasser Pendelschwingungen ausführen.



#### Dritter Abschnitt.

#### Generatoren für Pulsationen und Oscillationen.

Vierter Abschnitt.

**Pulsationsinstrumente.**



Fünfter Abschnitt.

**Oscillationsinstrumente.**



Sechster Abschnitt.

**Über die wichtigsten Fehlerquellen bei den Versuchen.**



Siebenter Abschnitt.

**Qualitative Versuche über die permanenten hydrodynamischen Energiekräfte.**

## Achter Abschnitt.

### Einige messende Versuche.



## Neunter Abschnitt.

### Versuche mit den temporären Energiekräften.



## Zehnter Abschnitt.

### Die Zusammensetzung temporärer Energiekräfte.

Elfter Abschnitt.

**Temporäre Kräfte in permanentem Strom- oder Kraftfelde.**



Zwölfter Abschnitt.

**Die hydrodynamische Induktionskraft und die Strombilder.**



## Dritter Teil.

**Die Analogie der hydrodynamischen Erscheinungen mit den elektrostatischen oder magnetischen.**

Erster Abschnitt.

**Die ersten Erfahrungen über elektrische oder magnetische Fernkräfte.**

## Zweiter Abschnitt.

## Elektrische, magnetische und hydrodynamische Fernwirkungen niederer Ordnung.



## Dritter Abschnitt.

## Die Felder als mathematische Hilfs- und physikalische Grundvorstellungen. Der fundamentale Induktionsschlufs der modernen Elektricitätslehre.



## Vierter Abschnitt.

## Die Felder in vollständig homogenen Medien.

## Fünfter Abschnitt.

### Die Felder in heterogenen Medien.



## Sechster Abschnitt.

### Energie und ponderomotorische Kräfte.



## Siebenter Abschnitt.

### Einheiten und Dimensionen der elektrischen, der magnetischen und der hydrodynamischen Gröfsen.

## Rückblick und Schlufsbetrachtungen.

# Erster Teil.

## Elementare Ableitung der hydrodynamischen Fernkräfte.

## Erster Abschnitt.

### Die qualitativen Gesetze der hydrodynamischen Fernkräfte.

**1. Zweck der elementaren Ableitung.** — Zum Studium der durch Flüssigkeitsdruck vermittelten, scheinbaren Fernkräfte bieten sich zwei Wege dar. Man kann einerseits ihre Existenz und ihre Gesetze aus den Prinzipien der Mechanik mit Hilfe der mathematischen Analyse ableiten; andererseits kann man zu demselben Ziele auf rein empirischem Wege, durch das Experiment, gelangen. Entsprechend der historischen Entwickelung haben wir im ersten Bande dieser Vorlesungen den ersten Weg verfolgt; wir werden im folgenden zeigen, was bis jetzt auf dem zweiten Wege erreicht worden ist.

Von den zwei Wegen macht der eine den anderen nicht überflüssig. Allerdings sind die Resultate, zu welchen man kommt, im wesentlichen dieselben, man lernt sie aber von weit verschiedener Seite kennen. Die Theorie behandelt ein idealisiertes Problem, wo die Flüssigkeit als unendlich ausgedehnt und mit idealisierten Eigenschaften, wie Inkompressibilität und Reibungslosigkeit, versehen vorausgesetzt wird. Die Resultate sind deshalb auch abstrakt, und es läfst sich nicht sofort erkennen, wie weit sie sich von der konkreten Wirklichkeit entfernen. Diese Lücke füllt das Experiment aus, welches die Erscheinungen als vollkommen konkrete Thatsachen hervortreten läfst. Was man aber dadurch auf einer Seite gewinnt, büfst man auf der anderen ein. Denn der Versuch läfst die Erscheinungen nur als isolierte Thatsachen für sich hervortreten,

während der Zusammenhang mit den fundamentalen Prinzipien der Mechanik durch keine Beobachtung, selbst die sorgfältigste, zu Tage tritt. Diese Lücke füllt ihrerseits nur die theoretische Behandlung des idealisierten Problems aus.

Die vollständige, streng mathematische Ableitung ist aber der Natur der Sache nach eine recht umständliche, und man wird nicht leicht während der Beobachtung eines Versuches ein klares Bild des mathematisch nachgewiesenen Zusammenhanges mit den Grundlagen der Mechanik im Kopfe haben können. Man wird ein starkes Bedürfnis empfinden, diesen Zusammenhang auch in perspektivischer Verkürzung zu sehen, ohne jedes Rückgreifen auf mathematische Entwickelungen. Es ist diese abgekürzte, rein elementare Entwickelung der wichtigsten Resultate über hydrodynamische Fernkräfte, die wir jetzt geben werden, als eine Einleitung zu dem rein experimentellen Studium derselben Erscheinungen. Von einer vollkommenen Strenge der Ableitung wird dabei nicht die Rede sein. Stellt man solche Forderungen, so wird man zuletzt immer gezwungen werden, in der einen oder anderen Form auf die vollständigen mathematischen Entwickelungen des ersten Bandes zurückzugreifen. Anstatt der Strenge stellen wir deshalb die Anschaulichkeit als das hauptsächliche Augenmerk im folgenden auf.

**2. Auftrieb aus beschleunigten Flüssigkeitsmassen.** — Dem einfachsten Beispiel einer bewegenden Kraft, welche auf Flüssigkeitsdruck beruht, begegnet man bei dem Auftriebe nach dem ARCHIMEDISCHEN Gesetze. Aus dem Drucke, welchen eine schwere Flüssigkeit gegen die Oberfläche eines eingetauchten Körpers ausübt, geht eine der Schwerkraft entgegengesetzt gerichtete Kraft hervor, deren Gröſse durch das Gewicht des verdrängten Flüssigkeitsvolumens gegeben ist.

Einem vollkommenen Analogon zu diesem statischen Gesetze wird man unter dynamischen Verhältnissen begegnen, wenn sich ein fremder Körper im Inneren einer beschleunigten Flüssigkeitsmasse befindet. Wird ein Gefäſs mit Wasser vertikal in die Höhe bewegt, so wird das Wasser wegen seiner Trägheit einen Druck gegen den Boden ausüben, solange eine aufwärts gerichtete Beschleunigung vorliegt. Die Trägheitskraft, mit der jedes Partikelchen sich relativ zu dem bewegten Gefäſse abwärts zu bewegen sucht, ist seiner Masse und seiner Beschleunigung proportional und dieser Beschleunigung entgegengesetzt gerichtet. Ein Beobachter, der die Bewegung des Gefäſses mitmacht, wird die Wirkung der Trägheit

nicht von einer Kraft wie die Schwere unterscheiden können. Bezieht man deshalb alles auf das bewegte Gefäſs, so wird man genau dieselben Verhältnisse wiederfinden, wie bei einer ruhenden schweren Flüssigkeit. Ein Körper, der sich relativ zu dem Gefäſse in Ruhe befindet, wird einen Auftrieb genau wie in einer schweren Flüssigkeit erleiden. Dieser Auftrieb ist der Trägheitskraft entgegengesetzt gerichtet, so daſs er die Richtung der Beschleunigung des Gefäſses hat. Wie der gewöhnliche Auftrieb durch das Gewicht, wird der neue durch die Trägheitskraft des verdrängten Flüssigkeitsvolumens gegeben sein, so daſs sein Betrag durch das Produkt der Beschleunigung des Gefäſses in die Masse des verdrängten Flüssigkeitsvolumens gemessen wird. Ob übrigens die Beschleunigung, wie wir des leichteren Vergleiches halber vorausgesetzt haben, nach oben gerichtet ist, oder irgend eine andere Richtung hat, bleibt, wie man sofort sieht, ganz gleichgültig. Wir werden deshalb auch den Namen „Auftrieb" in einem neuen, erweiterten Sinne des Wortes beibehalten, ohne damit die Vorstellung von einer bestimmten Richtung im Raume zu verknüpfen.

Die Analogie dieses Auftriebes mit dem Archimedischen wird noch durch die folgende Ableitung hervortreten, welche genau der berühmten Stevin'schen Ableitung des Archimedischen Prinzipes entspricht. Innerhalb einer translatorisch bewegten Flüssigkeit, welche von fremden Kräften, wie die Schwere, nicht beeinfluſst wird, richten wir unsere Aufmerksamkeit auf einen bestimmten Teil, den wir uns durch eine geschlossene Grenzfläche von der umgebenden Flüssigkeit getrennt denken. Die Bewegung dieses begrenzten Teiles beruht ausschlieſslich auf dem Druck der umgebenden Flüssigkeit gegen die Grenzfläche. Dieser Druck muſs also eine Resultantkraft veranlassen, die der innerhalb der Grenzfläche befindlichen Masse multipliziert mit ihrer Beschleunigung gleich ist. Wir können uns nun die Grenzfläche erstarrt denken. Denn der Druck, welchen sie erleidet, wird dadurch nicht im geringsten beeinfluſst. Nachher können wir die Flüssigkeit innerhalb der Grenzfläche entfernen und das Innere in irgend welcher anderen Weise mit Materie füllen. Auch dadurch wird der Druck der umgebenden Flüssigkeit nicht geändert, vorausgesetzt nur, daſs wir in irgend welcher Weise dafür sorgen, daſs die Grenzfläche wie früher die Translationsbewegung genau mitmacht. Diese Bedingung bleibt von selbst erfüllt, wenn die in den Hohlraum eingebrachte Materie homogen ist, mit derselben Dichte, und folglich auch derselben Trägheit wie die aus dem Hohlraum entfernte Flüssigkeit. Der in dieser Weise in die

Flüssigkeit eingebrachte fremde Körper wird also genau dieselbe Kraft erleiden, wie die früher in demselben Raume vorhandene Flüssigkeit. Diese Kraft ist dadurch gegeben, dafs sie der trägen Reaktion dieses Flüssigkeitsquantums das Gleichgewicht hält. Wir kommen also zu genau demselben Resultat wie oben, nämlich:

*Ein in einer translatorisch beschleunigten Flüssigkeitsmasse befindlicher Körper, der die Translationsbewegung der Flüssigkeit mitmacht, wird einen Auftrieb erleiden, dessen Richtung die der Beschleunigung ist, und dessen Gröfse durch das Produkt dieser Beschleunigung in die Masse des verdrängten Flüssigkeitsvolumens gegeben ist.*

**3. Induktive Verallgemeinerungen.** — Auf diesem Satze können wir die qualitative Ableitung der wichtigsten hydrodynamischen Fernkraftserscheinungen aufbauen. Eine strenge wird aber diese Ableitung nicht genannt werden können, und zwar aus dem Grunde, dafs wir den Satz immer etwas aufserhalb des Gebietes anwenden müssen, für das wir durch die gegebene Ableitung seine Gültigkeit bewiesen haben.

Die erste induktive Verallgemeinerung ist nach dem Kontinuitätsprinzipe selbstverständlich. Wir nehmen an, dafs das Gesetz auch dann in erster Annäherung anwendbar ist, wenn die Bewegung der Flüssigkeit nicht mehr die Natur einer reinen Translationsbewegung mit geraden, untereinander parallelen Stromlinien hat, sondern mit schwach gekrümmten oder schwach gegeneinander geneigten Stromlinien verläuft.

Die zweite Verallgemeinerung ist die wichtigste. Bei der Ableitung des Gesetzes setzten wir voraus, dafs der Körper die Bewegung der umgebenden Flüssigkeit genau mitmachte. Wir werden es aber zur Anwendung bringen auch dann, wenn der Körper eine Eigenbewegung durch die Flüssigkeit hat. Dabei machen wir jedoch in der That nichts anderes, als wenn wir das Archimedische Auftriebsgesetz qualitativ auf Körper anwenden, welche sich nicht in Ruhe befinden, sondern infolge des Auftriebes steigen, oder infolge der Schwere sinken. Quantitativ ist dieses nicht statthaft, wenn es sich um die Berechnung der Geschwindigkeit des Steigens oder des Sinkens handelt. Denn nach einem bekannten Resultate hat man, aufser dem Auftriebe, noch eine scheinbare Vergröfserung der Trägheit des Körpers in Rechnung zu bringen. Die qualitativen Folgerungen, die man aus der Existenz eines Auftriebes ziehen kann, ändern sich aber dadurch nicht.

Wenn wir in dieser Weise völlig von der Modifikation der Flüssigkeitsbewegung durch das Vorhandensein und die Bewegung des Körpers absehen, so heifst das, dafs wir alles auf der Betrachtung desjenigen Flüssigkeitsstromes begründen, welcher vor dem Einbringen des fremden Körpers vorhanden war. Diesen nennen wir den Einfallsstrom, zur Unterscheidung von dem den Körper umgebenden wirklichen Strom, der uns ohne tiefer gehende Untersuchungen unbekannt bleibt. Die in den folgenden Figuren gezeichneten Stromlinien beziehen sich immer auf den Einfallsstrom und sind deshalb auch durch den Körper hindurch verlängert. Zur Abkürzung benutzen wir auch entsprechende uneigentliche Ausdrücke; z. B. sagen wir, dafs ein Punkt des Körpers mit einem Punkte des Einfallsstromes zusammenfällt.

**4. Schwingende Bewegungen.** — Das Auftriebsgesetz werden wir jetzt auf den Fall in Anwendung bringen, wo der Einfallsstrom oscillierend ist, so dafs die einzelnen Flüssigkeitspartikelchen mit gleicher Schwingungsdauer und gleicher Phase längs den Elementen eines festliegenden Systemes von Stromlinien schwingen. Der Einfachheit halber sollen die Schwingungen nach einem einfachen Sinusgesetze verlaufen. Die Beschleunigung eines Partikelchens ist dann immer gegen seine mittlere Lage gerichtet und dem Abstand von dieser Lage proportional. Die Beschleunigung im Strome ist also gleich Null, wenn die Partikelchen ihre mittleren Lagen passieren, und erreicht ihre gröfsten absoluten Werte, wenn die Partikelchen sich in ihren Umkehrpunkten befinden. Was die geometrische Verteilung betrifft, so ist die Beschleunigung den Stromlinien des Feldes parallel, und dort am gröfsten, wo die Schwingungen mit den gröfsten Amplituden verlaufen.

Befindet sich ein fremder Körper, etwa eine Kugel, in einem solchen Strome und macht die oscillierende Bewegung genau mit, so wird er nach dem Auftriebsgesetze eine periodische Kraft erleiden, welche in genau derselben Weise wie die Beschleunigung des Stromes an Richtung und Gröfse periodisch wechselt. Zu zwei Zeiten, gleichviel vor und nach dem Durchgange der Flüssigkeitspartikelchen durch ihre mittleren Lagen, tritt die Kraft mit gleicher Intensität, aber entgegengesetzter Richtung auf, und solange diese Symmetrie besteht, wird die periodisch wechselnde Kraft im Mittel keine progressiv bewegende Resultante veranlassen können. Für das Zustandekommen einer solchen ist eine Asymmetrie während der aufeinander folgenden Halbperioden eine notwendige Bedingung.

Eine solche Asymmetrie, die sich sowohl auf die Intensität wie die Richtung der Kraft bezieht, wird im allgemeinen auftreten, wenn die Kugel andere Bewegungen besitzt, als die bis jetzt vorausgesetzten Oscillationen, mit welchen sie die Bewegung der umgebenden Flüssigkeitsmassen mitmacht.

Von Eigenbewegungen der Kugel werden wir zwei betrachten, beide schwingender Natur, Pulsationen, die sich auf das Volumen, und Oscillationen, die sich auf die Lage der Kugel beziehen. Die Worte „Schwingungen" oder „Vibrationen" werden wir als allgemeinere Bezeichnungen benutzen, welche sowohl die Pulsationen wie die Oscillationen umfassen. Dafs mit dem Auftreten solcher Eigenbewegungen eine Asymmetrie der auf dem Auftriebsgesetze beruhenden Kraft verbunden ist, leuchtet sofort ein. Denn zu zwei Zeiten gleich grofser, aber entgegengesetzt gerichteter Beschleunigung wird die pulsierende Kugel bei gröfserem Volumen von einer gröfseren, bei kleinerem von einer kleineren Kraft angegriffen werden. Was die Oscillationen betrifft, so kommen die schon betrachteten, mit welchen die Kugel die Bewegung des Stromes mitmacht, nicht in Frage. Es sind die Oscillationen relativ zu dem Strome, auf welche es ankommt. Diese werden aber auch die Kugel in verschiedene, und dadurch meistens auch in verschieden bewegte Flüssigkeitsmassen bringen. Die Kugel wird dann zu Zeiten, welche zu der Durchgangszeit der Partikelchen durch ihre mittleren Lagen symmetrisch liegen, der Wirkung ungleich grofser und nicht mehr genau entgegengesetzt gerichteter Beschleunigungen ausgesetzt.

Eigenschwingungen der Kugel und die damit folgende Asymmetrie sind aber noch nicht hinreichende Bedingungen für das Zustandekommen einer Kraft, welche dauernd progressive Bewegungen erzeugen kann. Denn verlaufen die Schwingungen der Kugel und die des Stromes nach von einander unabhängigen Gesetzen, so wird der Überschufs bald in einer Richtung, und bald in einer anderen ausfallen. Es ist notwendig, dafs sich die Asymmetrie dauernd in derselben Weise wiederholt, woraus folgt, dafs die Schwingungen der Kugel und die des Stromes von gleicher Periode sein müssen. In diesem Falle des Isochronismus wird offenbar die Asymmetrie, je nach dem Phasenunterschied, mehr oder weniger ausgeprägt sein, und am stärksten hervortreten, wenn die Kugel und die Flüssigkeitspartikelchen gleichzeitig durch ihre mittleren Lagen und folglich auch gleichzeitig durch ihre Umkehrlagen passieren. Diesen Spezialfall des Isochronismus werden wir als Synchronismus be-

zeichnen. Offenbar giebt es zwei entgegengesetzte Fälle des Synchronismus. Denn während das eine schwingende System durch eine bestimmte seiner Umkehrlagen passiert, kann das andere durch eine von zwei Umkehrlagen passieren. Diese zwei Fälle entsprechen den Phasenunterschieden 0 und $\frac{1}{2}$. Bei allen anderen Phasenunterschieden wird die Asymmetrie weniger ausgesprochen, und folglich auch die Intensität der progressiv bewegenden Kraft kleiner, um bei den Phasenunterschieden $\frac{1}{4}$ und $\frac{3}{4}$ ganz zu verschwinden. In diesen Fällen läſst sich die ganze Periode in zweimal zwei Viertelperioden teilen, in welchen die Kraft mit gleicher Gröſse und entgegengesetzter Richtung auftritt.

Wir werden uns im folgenden hauptsächlich mit dem Fall des Synchronismus beschäftigen. Es ist wichtig, hervorzuheben, daſs man in diesem Falle die zwei entgegengesetzten Synchronismen durch Vorzeichen voneinander unterscheiden kann. Dieses geschieht nach der folgenden Regel:

*Man beobachte die Bewegung zu einer beliebig gewählten Zeit. Die Fortschreitungsrichtung der Flüssigkeitspartikelchen zu dieser Zeit soll die positive Richtung der Stromlinien, die Fortschreitungsrichtung der Kugel die positive Richtung der Oscillationsachse der Kugel definieren. Eine Kugel, welche sich zu dieser Zeit ausdehnt, soll eine positiv, eine, welche sich zusammenzieht, eine negativ pulsierende Kugel genannt werden.*

Die in dieser Weise definierten Vorzeichen geben selbstverständlich kein absolutes, sondern nur ein relatives Verhältnis an. Es beruht auf Willkür, was wir positiv und was wir negativ nennen; wir hätten alle Vorzeichen entgegengesetzt erhalten, wenn wir die um eine halbe Periode später vorliegenden Bewegungen zu Grunde gelegt hätten. Das durch die Vorzeichen definierte gegenseitige Verhältnis der schwingenden Systeme ist aber ein eindeutiges. Zwei pulsierende Kugeln beispielsweise, welche sich gleichzeitig ausdehnen und sich gleichzeitig zusammenziehen, erhalten gleiches, zwei, von denen sich die eine ausdehnt, während sich die andere zusammenzieht, erhalten entgegengesetztes Vorzeichen.

Wir werden jetzt die wichtigsten Fälle der Asymmetrie, denen man bei synchronen Schwingungen begegnet, näher betrachten, um die darauf beruhenden progressiv bewegenden Kräfte zu studieren.

**5. Pulsierende Kugel in oscillierendem Strom.** — Eine Kugel dehne sich aus, während der Strom von links nach rechts, und ziehe sich zusammen, während der Strom von rechts nach links geht.

Legen wir die Verhältnisse während der ersten Halbperiode für die Bestimmung der Vorzeichen zu Grunde, so ist die Kugel eine positive, und die entsprechende positive Richtung des Stromes ist von links nach rechts. Wenn die Kugel beim Ausdehnen durch ihr mittleres Volumen passiert, hat der Strom seine gröſste positive Geschwindigkeit. Die Beschleunigung aber, und die Auftriebskraft, welche die Kugel erleidet, ist Null. Während sich nun die Kugel noch weiter ausdehnt, nimmt die Geschwindigkeit des Stromes ab, das heiſst, es treten negative Beschleunigung und eine entsprechende negativ gerichtete Kraft auf. Diese erreichen ihre gröſsten Werte, wenn die Kugel durch ihr gröſstes Volumen passiert, um dann wieder während der Kontraktion abzunehmen, beim mittleren Volumen der Kugel durch Null zu passieren, und mit dem entgegengesetzten, positiven Vorzeichen aufzutreten, während das Volumen der Kugel kleiner als das mittlere ist. Die bei dem gröſseren Volumen wirkende, negativ gerichtete Kraft ist die gröſsere. Die mittlere Resultantkraft ist also negativ, oder von rechts nach links gerichtet. Genau das entgegengesetzte wäre, wie man sofort einsieht, eingetreten, wenn die Kugel sich zusammengezogen hätte, während sich der Strom von links nach rechts, und sich ausgedehnt, während sich der Strom von rechts nach links bewegte. Wir finden also:

*Im Falle des Synchronismus wird eine positiv pulsierende Kugel in negativer, eine negativ pulsierende in positiver Richtung im Einfallsstrome getrieben.*

Das Resultat wird durch die Figur 1a und b dargestellt. In diesem, wie in allen ähnlichen folgenden Diagrammen sind die

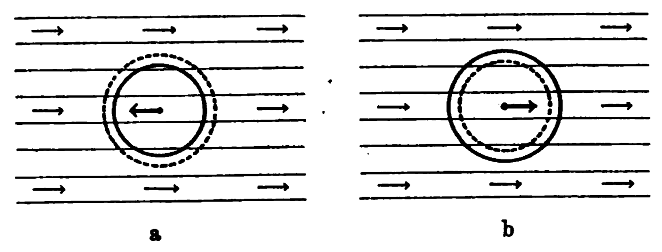



Fig. 1, a und b. Kraft gegen eine positive (a) und eine negative (b) pulsierende Kugel in oscillierendem Strom.

Umkehrlagen der Kugel durch einen voll ausgezogenen und einen gestrichelten Kreis dargestellt. Wir kommen überein, daſs zu der für die Festsetzung der Vorzeichen gewählten Zeit die Bewegung

von der voll ausgezogenen zu der gestrichelten Lage gerichtet sein soll. Eine positive pulsierende Kugel wird dann durch einen voll ausgezogenen inneren und einen gestrichelten äufseren Kreis, eine negative durch einen voll ausgezogenen äufseren und einen gestrichelten inneren Kreis dargestellt. Die kleinen Pfeile im Strome stellen die Geschwindigkeit des Stromes in dem zur Festsetzung der Vorzeichen gewählten Augenblicke dar. Oder auch, wenn man das Resultat in unmittelbarem Zusammenhang mit dem Auftriebsgesetze sehen will, sie stellen die Beschleunigung des Stromes dar, zu der Zeit, wo die Kugel die durch den voll ausgezogenen Kreis dargestellte Lage einnimmt. Die im Mittelpunkte der Kreise angreifenden Pfeile stellen die resultierenden mittleren Kräfte dar.

Unsere pulsierende Kugel wird also immer längs der Tangentenrichtung der Stromlinien getrieben, genau wie ein elektrisiertes Körperchen oder ein magnetischer Pol längs der Tangentenrichtung der Kraftlinien. Nur in einem Punkte besteht ein wichtiger Unterschied. Denn der positive Körper oder Pol wird in positiver, der negative in negativer Richtung längs den Kraftlinien getrieben. Dafs dieser Unterschied nicht in der Wahl der Definitionen, sondern in der Natur der Dinge begründet ist, wird sich gleich zeigen.

**6. Scheinbare Fernkräfte zwischen pulsierenden Kugeln.** — Die Natur des Stromes, welchen eine pulsierende Kugel $A$ in der umgebenden Flüssigkeit erzeugt, ist leicht vorauszusehen. Aus Symmetriegründen müssen die Stromlinien radiale Strahlen sein, und wegen der Inkompressibilität der Flüssigkeit müssen die Verschiebungen, die Geschwindigkeiten und die Beschleunigungen dem Quadrat des Abstandes umgekehrt proportional abnehmen. Dehnt sich die Kugel aus zu der für die Festsetzung der Vorzeichen gewählten Anfangszeit, so ist sie positiv, und die zugehörige positive Richtung des Radialstromes geht nach aufsen; zieht sie sich zu dieser Zeit zusammen, so ist sie negativ, und die zugehörige positive Richtung des Radialstromes geht nach innen.

Der positiv nach aufsen gerichtete Radialstrom sei nun der Einfallsstrom, in dem sich eine zweite, mit der ersten $A$ synchron pulsierende Kugel $B$ befindet. Wenn sich diese zweite Kugel $B$ gleichzeitig mit der ersten $A$ ausdehnt und gleichzeitig mit ihr zusammenzieht, so ist sie auch positiv und wird in negativer Richtung im Strome getrieben, also gegen die positive Kugel $A$. Wenn sich dagegen $B$ ausdehnt, während sich $A$ zusammenzieht, und umgekehrt, so ist sie negativ und wird in der positiven Strom-

richtung, das heifst von der Kugel $A$ weg getrieben. Umgekehrt befindet sich die Kugel $A$ in dem von $B$ erzeugten Einfallsstrome, und wird, wie man sofort aus den Vorzeichen der Kugeln und den zugehörigen positiven Richtungen der Ströme sieht, gegen $B$ getrieben, wenn $B$ gegen $A$, und von $B$ weg, wenn $B$ von $A$ weg getrieben wird. Schliefslich, da die Intensität der Beschleunigung, der die Kraft proportional ist, sich umgekehrt wie das Quadrat des Abstandes verhält, wird auch die Intensität der Kraft selbst umgekehrt quadratisch abnehmen. Es ergiebt sich also das Resultat:

*Gleich pulsierende Kugeln ziehen einander an, entgegengesetzt pulsierende stofsen einander ab mit einer dem Quadrat des Abstandes umgekehrt proportionalen Kraft.*

Das Resultat wird durch die Figur 2a und b dargestellt, wo in der übereingekommenen Weise die voll ausgezogenen Kreise einerseits und die gestrichelten andererseits gleichzeitige Lagen der zwei Kugeln angeben, und die Pfeile die Richtung der resultierenden Kraft zeigen.

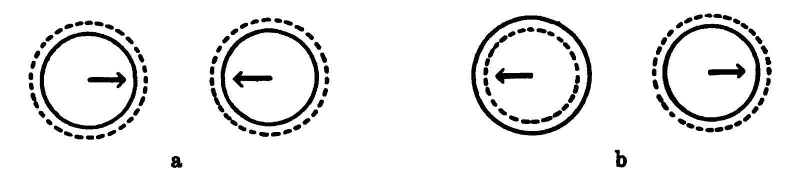



Fig. 2, a und b. Anziehung gleich pulsierender (a), Abstofsung entgegengesetzt pulsierender Kugeln (b).

Die somit abgeleiteten Anziehungs- und Abstofsungskräfte beruhen auf dem Auftrieb, welchen die Kugeln von seiten der umgebenden beschleunigten Flüssigkeitsmassen erleiden. Die Erscheinung wird aber vollständig das Aussehen einer Wirkung in die Ferne haben und mufs notwendig als eine solche aufgefafst werden von jedem Beobachter, der nur die Kugeln und die progressiven Bewegungen, nicht aber die Flüssigkeit und die kleinen Schwingungen sieht. Diese Wirkung in die Ferne entspricht genau derjenigen, welche zwischen elektrisch geladenen Körperchen oder zwischen magnetischen Polen auftritt, nur mit dem Unterschied, dafs im hydrodynamischen Falle gleiches Vorzeichen Anziehung, und entgegengesetztes Abstofsung veranlafst.

Versucht man diesen Unterschied durch geänderte Definition des gleichnamigen und des ungleichnamigen zu beseitigen, so stöfst

man sofort auf logische Widersprüche. Haben die Kugeln $A$ und $B$ entgegengesetzte, und die Kugeln $B$ und $C$ entgegengesetzte Pulsationen, so haben $A$ und $C$ gleiche Pulsationen. Würde man nun die Kugeln gleichnamig nennen, wenn sie entgegengesetzte Pulsationen hätten, so würde $A$ mit $B$ und $B$ mit $C$, nicht aber $C$ mit $A$ gleichnamig sein, was absurd wäre. Der Gegensatz zwischen den hydrodynamischen Kräften einerseits, und den elektrischen und magnetischen andererseits läfst sich also nicht durch Abänderung der Definitionen beseitigen. Er ist in den Realitäten begründet und tritt beispielsweise durch folgendes deutlich hervor: Drei gleichnamige magnetische Pole stofsen einander alle gegenseitig ab. Wenn aber die zwei pulsierenden Kugeln $A$ und $B$, und ebenfalls die zwei pulsierenden Kugeln $B$ und $C$ einander abstofsen, so müssen notwendig $A$ und $C$ einander anziehen. Oder umgekehrt: drei gleich pulsierende Kugeln $A$, $B$ und $C$ ziehen einander alle gegenseitig an. Wenn aber die zwei magnetischen Pole $A$ und $B$, und ebenfalls die zwei magnetischen Pole $B$ und $C$ einander anziehen, so werden einander die Pole $A$ und $C$ notwendig abstofsen.

**7. Pulsierende Kugelpaare.** — Zwei miteinander verbundene Kugeln, welche mit gleicher Intensität entgegengesetzte Pulsationen ausführen, nennen wir ein pulsierendes Kugelpaar. Die von der negativen zu der positiven Kugel gerichtete Verbindungslinie heifst

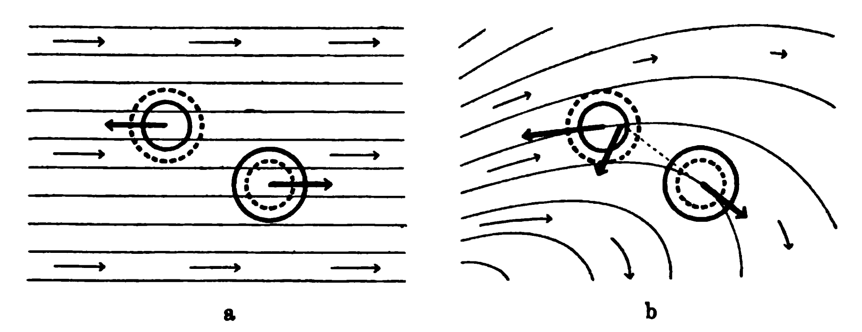



Fig. 8, a und b. Pulsierendes Kugelpaar in Parallelstrom (a), in veränderlichem Strom (b).

die Achse. Befindet sich ein solches Kugelpaar in einem oscillierenden Strome, welcher in der Umgebung beider Kugeln gleiche Richtung und Intensität hat, so werden die zwei Kugeln von gleich grofsen, aber entgegengesetzt gerichteten Kräften angegriffen. Diese bilden ein Kräftepaar, welches eine solche Drehung zu erzeugen sucht,

daſs sich die Achse entgegen der positiven Richtung des Stromes einstellt. In der umgekehrten Lage, wo die Achse des Kugelpaares mit dem Strome gerichtet ist, herrscht labiles Gleichgewicht.

Hat der Strom eine von Punkt zu Punkt veränderliche Richtung und Intensität, so werden die zwei längs den Stromlinien gerichteten Kräfte, welche die einzelnen Kugeln angreifen, auſser einem Kräftepaar zugleich eine Resultantkraft bilden, wie es die Figur 3b zeigt. Die Beziehung dieser Resultantkraft zu dem Strome werden wir unten in einem analogen Falle untersuchen. Dagegen können wir sofort die Beziehung dieser Kraft zu demjenigen System angeben, welches den Strom erzeugt, vorausgesetzt, daſs dasselbe eine pulsierende Kugel oder ein pulsierendes Kugelpaar ist. Denn das pulsierende Kugelpaar wird einer pulsierenden Kugel einen anziehenden und einen abstoſsenden Pol darbieten. Das Verhältnis wird also genau dasselbe wie zwischen einem Elementarmagnet und einem magnetischen Pol. Ganz entsprechend werden sich zwei pulsierende Kugelpaare gegeneinander wie zwei Elementarmagnete verhalten, nur daſs man sich immer an das verkehrte Polgesetz zu erinnern hat.

**8. Oscillierende Kugel in oscillierendem Strome.** — Man hat sofort Grund zu vermuten, daſs sich eine oscillierende Kugel und ein pulsierendes Kugelpaar wesentlich ähnlich verhalten werden. Denn eine durch das Oscillationscentrum senkrecht zur Oscillationsachse gelegte Ebene wird die oscillierende Kugel in zwei Kugelsegmente zerlegen, welche ihre Volumina mit gleicher Intensität entgegengesetzt verändern. Die augenblickliche Fortschreitungsrichtung der Kugel ist die Richtung von dem kontrahierenden zu dem expandierenden Kugelsegment, und es ist leicht zu sehen, daſs man zu derselben Definition der positiven Richtung der Oscillationsachse kommt, sei es, daſs man direkt die Regel 4 anwendet, oder sei es, daſs man den Vergleich mit einem pulsierenden Kugelpaare benutzt.

Die Stromfelder, mit welchen sich das pulsierende Kugelpaar einerseits und die oscillierende Kugel andererseits umgeben, müssen aus zwingenden Gründen wesentlich dieselben sein. Denn im einen Falle müssen die Stromlinien von der augenblicklich sich ausdehnenden Kugel ausgehen, um auf der gleichzeitig sich zusammenziehenden zu enden, im anderen müssen sie von der augenblicklich vorausgehenden Kugelhälfte ausgehen, um auf der nachfolgenden zu enden.

Die Ähnlichkeit dehnt sich auch auf die bewegenden Kräfte aus, welche die oscillierende Kugel einerseits oder das pulsierende Kugelpaar andererseits in einem oscillierenden Strome erleiden. Im homogenen Felde wird die oscillierende Kugel in zwei Lagen, welche um die mittlere symmetrisch sind (Figur 4a), von gleich grofsen, aber entgegengesetzt gerichteten Kräften angegriffen. Diese bilden im Mittel ein Kräftepaar, welches genau dem Kräftepaar der Figur 3a entspricht.

Über dieses Kräftepaar ist jedoch insofern eine Bemerkung zu machen, als es nicht immer ein materielles Angriffsobjekt hat. Als solches kann man die Kugel nämlich nicht ohne weiteres ansehen. Denn diese wird zu jeder Zeit nur von einer Kraft angegriffen, deren Angriffspunkt das Centrum ist. Verfolgen wir aber die Wirkung dieser Kraft: Wenn die Kugel, auf der Figur von unten kommend, durch die mittlere Lage passiert, hat der Strom seine gröfste Geschwindigkeit nach rechts und keine Beschleunigung, so dafs keine Kraft auftritt. Während sie aber nach oben fortschreitet,

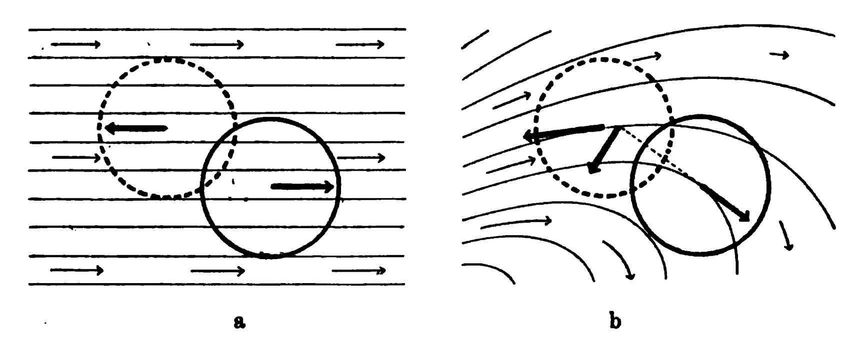



Fig. 4, a und b. Oscillierende Kugel in Parallelstrom (a), veränderlichem Strom (b).

tritt eine von rechts nach links gerichtete Beschleunigung im Strome und eine damit proportionale Kraft auf. Diese erreicht ihren gröfsten Wert, wenn die Kugel durch ihre obere Umkehrlage geht, um auf Null herabzusinken, wenn die Kugel von oben durch ihre mittlere Lage passiert, und dann unterhalb dieser Lage mit dem entgegengesetzten Vorzeichen aufzutreten. Die Kraft sucht also eigentlich nur die Bahn der Kugel zu lenken, um sie über der mittleren Lage zu einer nach links, und unter derselben zu einer nach rechts gebogenen Schleife zu verändern. Es ist also nicht die Kugel selbst, sondern ihre Oscillationsachse, auf welche die Kraft

primär drehend einwirkt. Was sekundär eintritt, wird von der Beziehung der Kugel zu der Oscillationsachse abhängen. Ist diese eine wirkliche materielle Achse, auf welcher die Kugel gleitet, so wird diese Achse gedreht, und mit ihr die Kugel. Die alternierend auftretenden, einander entgegengesetzt gerichteten Kräfte werden dann im Mittel vollständig einem gewöhnlichen Kräftepaar äquivalent, und wir können von einer Drehung auch der Kugel selbst durch dieses Kräftepaar reden.

Wie aus der Figur ersichtlich, wird diese Drehung immer gegen die Lage führen, in welcher die Kugel gegen den Strom oscilliert. In dieser Lage ist das Gleichgewicht stabil, während in der umgekehrten Lage, wo sie mit dem Strome oscilliert, labiles Gleichgewicht herrscht.

In einem Strome, dessen Richtung und Intensität von Ort zu Ort veränderlich ist, wird zu diesem Drehungsmomente noch eine progressiv bewegende Kraft kommen. Denn wenn die Kugel zwischen verschiedenen und verschieden bewegten Flüssigkeitsmassen hin und her oscilliert, so wird sie in zwei Lagen, welche zu der mittleren symmetrisch sind, von Kräften angegriffen, welche nicht mehr genau gleich grofs und nicht mehr einander genau entgegengesetzt gerichtet sind. Dabei begegnen wir, wie der Vergleich der Figur 4b mit der Figur 3b zeigt, genau denselben geometrischen Verhältnissen, wie im Falle eines pulsierenden Kugelpaares.

Um diese Kraft in ihrer Beziehung zu dem Einfallsstrome charakterisieren zu können, machen wir über die Beziehung der Stromintensität zu den Stromlinien die folgenden zwei Bemerkungen. Wir nehmen an, dafs die Flüssigkeit inkompressibel ist, und daraus folgt sofort, dafs, wenn die Stromlinien voneinander divergieren, die Stromintensität dort am gröfsten sein wird, wo die Stromlinien am dichtesten zusammengedrängt sind. Zweitens nehmen wir an, dafs die Bewegung der Flüssigkeit immer auf der Bewegung entfernter Körper beruht. Nach einem bekannten Satz der Hydrodynamik wird dann die Bewegung eine wirbelfreie oder potentielle sein. Eine solche läfst sich durch Äquipotentialflächen darstellen, welche senkrecht zu der Geschwindigkeitsrichtung verlaufen. Die Geschwindigkeit ist immer dem Normalabstande zwischen zwei nacheinander folgenden solchen Flächen umgekehrt proportional. Der Normalabstand dieser zu den Stromlinien senkrechten Flächen ist aber um so gröfser, je mehr man nach der konvexen, und um so kleiner, je mehr man nach der konkaven Seite der Stromlinien fortschreitet. Wenn die Stromlinien gekrümmt sind, hat man also die

grösere Stromintensität auf der konkaven, die kleinere auf der konvexen Seite der Stromlinien zu suchen.

Nach diesen Bemerkungen können wir die Konstruktion der Figur 4b in den durch die Figur 5a bis f dargestellten Fällen ausführen. Es ergeben sich dann die Kraftrichtungen, welche durch die kleinen, im Mittelpunkte der Kugel angreifenden Pfeile dar-

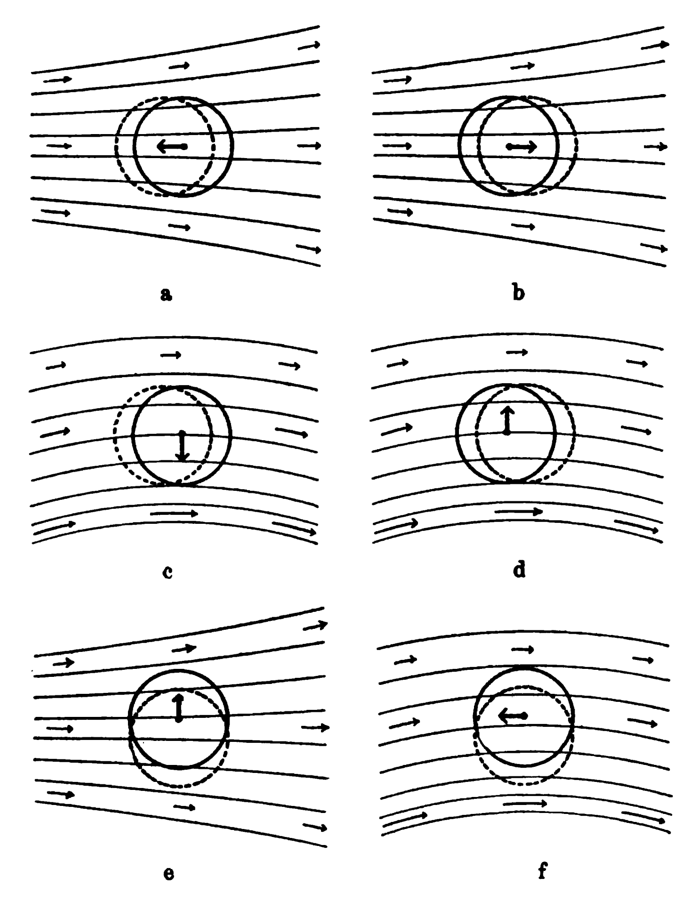



Fig. 5, a bis f. Oscillierende Kugel in divergierendem oder in gekrümmtem Strom.

gestellt sind. Also: eine Kugel, welche gegen den Strom oscilliert (Figur 5a und c), wird in der Richtung zunehmender Stromintensität, eine Kugel, welche mit dem Strome oscilliert (Figur 5b und d), wird in der Richtung abnehmender Stromintensität getrieben. Eine Kugel, welche senkrecht zu den Stromlinien schwingt (Figur 5e und f), wird nach der Seite hin getrieben, wo sie eine Komponente des Stromes gegen ihre eigenen Oscillationen erhält.

In diesen Resultaten und in dem früheren über die Drehung der Kugel erblicken wir ein gemeinschaftliches Prinzip, welches gleichzeitig für oscillierende Kugel und pulsierendes Kugelpaar gültig ist. Um es kurz ausdrücken zu können, fassen wir eine Stromkomponente mit der Achse der Kugel oder des Kugelpaares als eine negative Komponente gegen dieselbe auf, und finden:

*Eine oscillierende Kugel, beziehungsweise ein pulsierendes Kugelpaar, sucht sich so in dem Strome zu drehen oder zu verschieben, dafs sie die gröfstmögliche Stromkomponente entgegen ihrer Achse erhält.*

Dieser Satz läfst die inverse Analogie mit einem Magnet im magnetischen Felde hervortreten. Denn bekanntlich läfst sich zu einer gewählten positiven Richtung der Achse eines Magnets nur in einer Weise widerspruchsfrei eine positive Richtung des magnetischen Feldes zuordnen. Dieses Zuordnungsprinzip ist in seinem Wesen rein geometrisch und ein und dasselbe im magnetischen und im hydrodynamischen Falle. Der physikalische Unterschied, dem wir oben (6) in anderer Form begegneten, zeigt sich darin, dafs ein Magnet sich so zu drehen oder zu verschieben sucht, dafs er die gröfstmögliche Komponente des Feldes mit seiner Achse erhält.

**9. Fernkräfte zwischen pulsierenden und oscillierenden Kugeln.** — Anstatt die Kraft auf das umgebende Stromfeld, können wir sie auf denjenigen oder diejenigen Körper beziehen, welche den Strom erzeugen. Da sich die oscillierende Kugel sowohl in Bezug auf die Erzeugung von Stromfeldern, wie in Bezug auf die Kraft, welche sie in einem Stromfelde erleidet, ganz wie ein pulsierendes Kugelpaar verhält, so lassen sich die für pulsierende Kugelpaare gefundenen Resultate unmittelbar auf die oscillierende Kugel übertragen. Die Wechselwirkung zwischen einer pulsierenden Kugel und einer oscillierenden wird dann der Wechselwirkung zwischen einem magnetischen Pol und einem Magnet, die Wechselwirkung zwischen zwei oscillierenden Kugeln der zwischen zwei Magneten entsprechen, nur dafs man immer mit dem verkehrten Polgesetz zu rechnen hat.

Diese Wechselwirkungen sind für den Fall einer pulsierenden und einer oscillierenden Kugel durch die Figur 6a bis c, und für den Fall zweier oscillierender Kugeln die Figur 7a bis g illustriert. Wie früher bedeutet eine durch einen inneren voll ausgezogenen und einen äufseren gestrichelten Kreis dargestellte pulsierende Kugel eine positive, und entsprechend ist die positive Achse

einer oscillierenden Kugel von dem Mittelpunkte des voll ausgezogenen gegen den Mittelpunkt des gestrichelten Kreises gerichtet.

Mit Rücksicht auf die spätere Besprechung der Versuche wird es nützlich sein, für die verschiedenen Lagen kurze Bezeichnungen zu haben. Im Falle einer pulsierenden und einer oscillierenden Kugel ist alles durch die Lage bestimmt, welche die Achse der oscillierenden Kugel relativ zu der Verbindungslinie mit der pulsierenden einnimmt. Es giebt dann zwei Hauptlagen; die Oscillationen sind longitudinal, wenn sie parallel (Figur 6a und b), dagegen transversal, wenn sie senkrecht zu dieser Linie verlaufen (Figur 6c). Im Falle zweier oscillierender Kugeln hat man

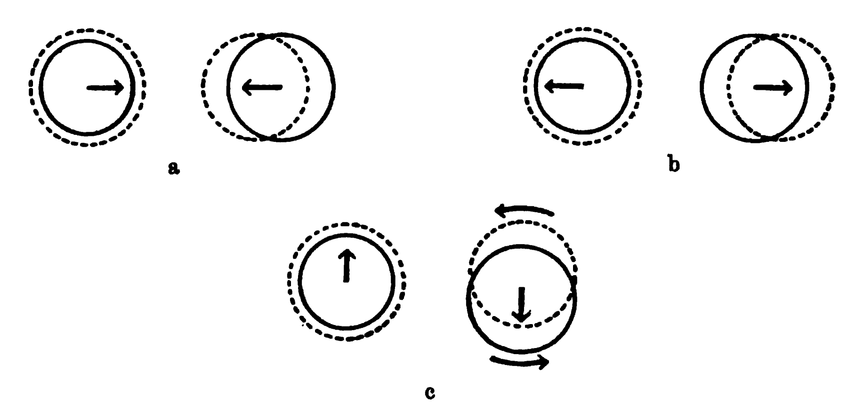



Fig. 6, a, b und c. Fernkräfte zwischen einer pulsierenden und einer oscillierenden Kugel.

mit drei Richtungen zu thun, die der Verbindungslinie und die der zwei Oscillationsachsen. Wenn alle drei Richtungen zusammenfallen, nennen wir die Oscillationen einfach longitudinal (Figur 7a und b). Wenn die Achsen unter sich parallel, aber zu der Verbindungslinie senkrecht sind, nennen wir die Oscillationen parallel-transversal (Figur 7c und d). Intermediär zwischen diesen beiden Fällen ist der, dafs die eine Kugel längs und die andere senkrecht zu der Verbindungslinie schwingt; die Oscillationen können dann longitudinal-transversal genannt werden (Figur 7e und f). Schliefslich können die Oscillationsachsen sowohl zu einander wie zu der Verbindungslinie senkrecht stehen. Die Oscillationen nennen wir dann normal-transversal. Der Fall ist durch die Figur 7g veranschaulicht, wenn man sich durch den voll ausgezogenen Kreis links eine senkrecht zu der Ebene des Papieres oscillierende Kugel dargestellt denkt.

Bei diesen Bezeichnungen beziehen sich die Worte „longitudinal" und „transversal" immer auf die Lagen der Oscillationsachsen zu der Verbindungslinie der Kugeln, während die Worte „parallel" und „normal" die Lagen der Oscillationsachsen relativ zu einander darstellen. Wir fügen noch hinzu, dafs man die beiden Fälle der longitudinalen Oscillationen dadurch voneinander unterscheiden

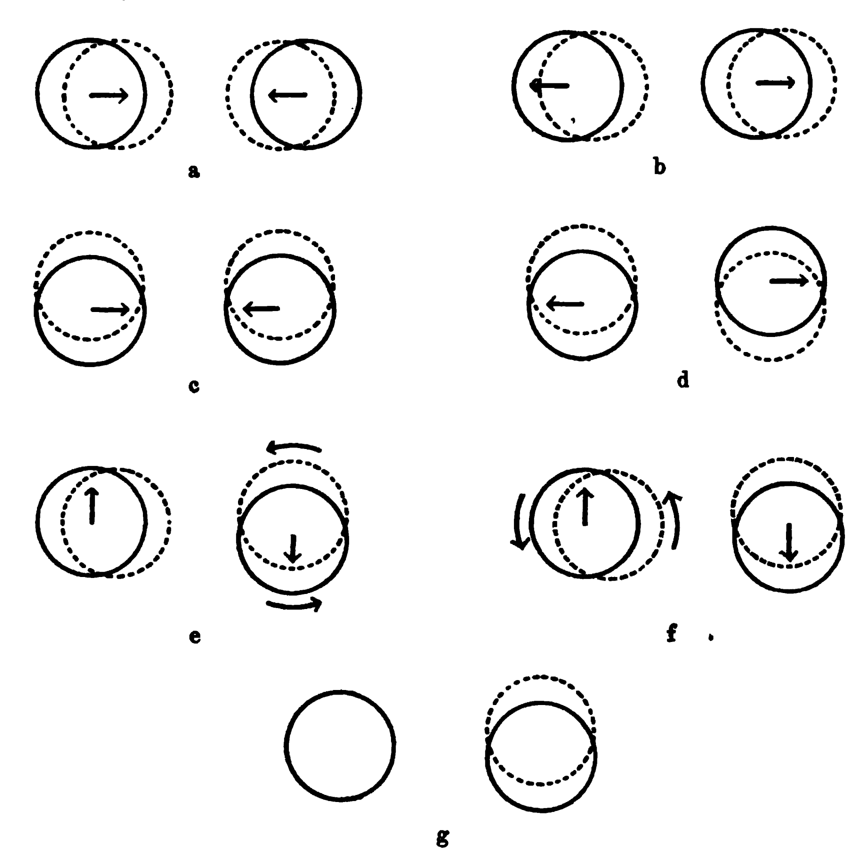



Fig. 7, a bis g. Fernkräfte zwischen zwei oscillierenden Kugeln.

kann, dafs man sagt, die Kugeln oscillieren gegeneinander (Figur 7a), oder miteinander (Figur 7b). Ganz entsprechend kann man die transversalen Oscillationen im Falle c als Oscillationen mit-, und im Falle d als Oscillationen gegeneinander bezeichnen. Im Anschlufs an diese Bezeichnungen können wir auch die zwei Fälle der longitudinalen Oscillationen einer Kugel relativ zu einer pulsierenden als Oscillationen gegen (Figur 6a) oder mit (b) den Pulsationen unterscheiden.

Die Fernkräfte, welche zwischen den pulsierenden und oscillierenden Kugeln in allen diesen Lagen auftreten, kann man nun in zweierlei Weise ableiten. Entweder nimmt man die Bilder der Ströme zu Hilfe, mit welchen sich eine pulsierende beziehungsweise eine oscillierende Kugel umgiebt (Figuren 1 und 7 des Bandes I), und leitet die Kräfte ab, welche die andere pulsierende oder oscillierende Kugel in diesen Strömen erleidet, indem man mit den Figuren 1, 4 und 5 vergleicht. Oder aber, man denkt sich im Mittelpunkte des Zeichens für die positive pulsierende Kugel ein *N*, und im Mittelpunkte des Zeichens für die negative ein *S*; entsprechend denkt man sich ein *N* im Mittelpunkte des gestrichelten, und ein *S* im Mittelpunkte des voll ausgezogenen Kreises im Zeichen für die oscillierende Kugel gezeichnet. Diese *N* und *S* betrachtet man als Nord- und Südpole der analogen magnetischen Systeme, und leitet die Kraftwirkungen unter der Anwendung des verkehrten Polgesetzes ab. Die Resultate, zu denen man kommt, ergänzt durch einige Ergebnisse der vollständigeren Rechnungen (vergl. die Formeln **17** unten), lassen sich folgendermaſsen kurz zusammenfassen:

1. Gleich pulsierende Kugeln ziehen einander an, entgegengesetzt pulsierende stoſsen einander ab (Figur 2a und b).

2. Wenn eine oscillierende Kugel longitudinal relativ zu einer pulsierenden oscilliert, so tritt Anziehung ein, wenn die Oscillationen gegen, Abstoſsung, wenn sie mit den Pulsationen verlaufen (Figur 6a und b).

3. Wenn eine oscillierende Kugel transversal relativ zu der pulsierenden oscilliert, so treten zwei gleich groſse, und einander entgegengesetzt gerichteten Kräftepaare auf, deren das eine die oscillierende Kugel, und das andere die Verbindungslinie beider Kugeln zu drehen sucht (Figur 6c).

4. Longitudinal oscillierende Kugeln ziehen einander an, wenn sie gegeneinander, stoſen einander ab, wenn sie miteinander oscillieren (Figur 7a und b).

5. Parallel-transversal oscillierende Kugeln ziehen einander an, wenn sie miteinander, stoſsen einander ab, wenn sie gegeneinander oscillieren (Figur 7c und d). Diese Kraft hat halb so groſse Intensität wie die vorhergehende.

6. In der longitudinal-transversalen Lage treten gleichzeitig zwei Paare von Kräftepaaren auf, deren das eine Paar durch Figur 7e, und das andere durch f dargestellt wird. Von den ersten zwei,

welche gleich grofs, und einander entgegengesetzt gerichtet sind, greift das eine die transversal oscillierende Kugel, und das andere die Verbindungslinie beider Kugeln an. Von den letzten zwei, welche nur halb so grofse Intensität als die vorhergehenden haben, aber ebenfalls gleich grofs und einander entgegengesetzt gerichtet sind, greift das eine die longitudinal oscillierende Kugel, und das andere wieder die Verbindungslinie beider Kugeln an. Die zwei Kräftepaare, welche die Kugeln angreifen, sind gleichgerichtet, und ebenso die beiden Kräftepaare, welche die Verbindungslinie angreifen. Das Resultat der Superposition aller Wirkungen wird deshalb eine Drehung beider Kugeln in einer Richtung, und eine Drehung ihrer Verbindungslinie in der entgegengesetzten sein.

7. In der normal-transversalen Lage werden die Kugeln von gleich grossen, und einander entgegengesetzt gerichteten Kräftepaaren angegriffen, welche die Kugeln um ihre gemeinschaftliche Verbindungslinie zu drehen suchen (Figur 7g).

**10. Inducierende Kräfte und energetische Kräfte.** — Die thatsächlich wirkende hydrodynamische Druckkraft ist immer eine periodische, welche in erster Linie Schwingungen erzeugt. Nur als Folge einer meistens sehr schwachen Asymmetrie tritt noch eine progressive Bewegung hinzu, die jedoch, wegen ihrer leichteren Beobachtbarkeit, die Aufmerksamkeit eher auf sich zieht. Der Übersichtlichkeit halber können wir uns die totale Kraft in zwei Partialkräfte zerlegt denken, die inducierende oder Induktionskraft, welche die rein schwingende, und die energetische oder Energiekraft, welche die progressive Partialbewegung erzeugt.

Hat die Kugel genau die Dichte der Flüssigkeit, und keine Eigenbewegung, so wird sie von der inducierenden Kraft gezwungen, die Bewegung der Flüssigkeit genau mitzumachen. Relativ zu der Flüssigkeit hat sie dann keine Bewegung. Hat sie aber kleinere Dichte, so wird sie kleinere Trägheit, oder gröfsere Beweglichkeit als ein gleiches Flüssigkeitsvolumen haben, und unter dem Einflufs der Induktionskraft wird sie dann stärkere Schwingungen als die Flüssigkeit annehmen. Mit gröfserer Dichte werden dagegen kleinere Beweglichkeit und damit kleinere Schwingungen als die des Stromes folgen. Relativ gerechnet wird also die leichtere Kugel mit, die schwerere aber gegen den Strom schwingen. Indem wir die reciproke Dichte, oder das specifische Volumen als Mafs der Beweglichkeit benutzen, können wir die Wirkung der Induktionskraft in der folgenden Weise beschreiben:

*Eine Kugel, welche gröfsere Beweglichkeit als die Flüssigkeit hat, wird in relative Oscillationen mit dem Strome, eine Kugel, welche kleinere Beweglichkeit als die Flüssigkeit hat, wird in relative Oscillationen gegen den Strom versetzt.*

Nachdem man einmal die Analogie des Stromfeldes mit einem magnetischen Felde, und einer oscillierenden Kugel mit einem Magnet, erkannt hat, wird man in dem eben angeführten einfachen Resultate eine Erweiterung dieser Analogie erblicken. Die Beweglichkeit entspricht dabei der Polarisierbarkeit, und wenn wir die hydrodynamischen Ausdrücke durch die entsprechenden magnetischen ersetzen, so ergiebt sich das bekannte Resultat: ein Körper mit gröfserer Polarisierbarkeit als das umgebene Feld wird, relativ gerechnet, eine Polarität in der Richtung des Feldes erhalten, ein Körper mit kleinerer Polarisierbarkeit dagegen eine Polarität entgegen dem Felde. Die leicht bewegliche Kugel wird deshalb einem ferromagnetischen, die schwer bewegliche einem diamagnetischen Körper entsprechen.

Die von dem Strome inducierten Oscillationen können sich natürlich auf die schon vorhandenen, durch fremde Kräfte erzeugten, überlagern, genau wie sich der inducierte Magnetismus über den schon vorhandenen permanenten Magnetismus überlagern kann. Die inducierten Oscillationen werden, genau wie der inducierte Magnetismus, mit dem umgebenden Stromfelde entstehen und wieder verschwinden, und können mit Rücksicht hierauf temporäre Oscillationen genannt werden, entsprechend dem temporären Magnetismus. Diejenigen Oscillationen, welche zurückbleiben, wenn das umgebende Feld nicht mehr vorhanden ist, können die permanenten genannt werden.

**11. Permanente und temporäre Energiekräfte.** — Die Energiekraft, welche eine oscillierende Kugel angreift, können wir nun in zwei Partialkräfte zerlegen, eine, welche auf den permanenten, und eine, welche auf den temporären Partialoscillationen beruht, ganz entsprechend der Zerlegung der ponderomotorischen Kraft, welche einen Magnet angreift. Dabei bleiben alle Resultate, welche wir für die Kraftwirkungen auf eine oscillierende Kugel gefunden haben, bestehen. Denn zu ihrer Ableitung wurde nur das Vorhandensein von Oscillationen vorausgesetzt, ohne Annahmen über deren dynamischen Ursprung.

Eine reine permanente Energiekraft wird nun vorliegen, wenn die Kugel genau die Beweglichkeit der Flüssigkeit hat. Denn

relativ zu der Flüssigkeit hat dann die Kugel keine temporären Oscillationen. In diesem Falle haben wir nichts Neues zu den allgemein abgeleiteten Resultaten hinzuzufügen. Alle Lagen der Oscillationsachse der Kugel zu den Stromlinien des Feldes sind dann möglich, und alle die durch die Figuren 4 bis 7 dargestellten Fälle können vorkommen.

Eine reine temporäre Energiekraft haben wir dagegen, wenn keine permanenten Oscillationen vorliegen, und die Kugel eine andere Beweglichkeit als die Flüssigkeit hat. In diesem Falle ist verschiedenes Neue zu den früher abgeleiteten allgemeinen Resultaten hinzuzufügen. Zunächst sieht man sofort, daſs nicht alle durch die Figuren 4 bis 7 dargestellten Fälle vorkommen können. Denn die Oscillationsachse der temporär schwingenden Kugel ist immer längs der Stromlinien des Feldes gerichtet. Die Frage nach einer Drehung der temporär oscillierenden Kugel fällt deshalb fort, und ebensowenig können die durch Figur 5 e und f veranschaulichten Verschiebungen vorkommen. Zur Anwendung kommen nur die Figuren 5 a bis d. a und c stellen dabei die schwer bewegliche, und deshalb, relativ gerechnet, gegen den Strom oscillierende Kugel, b und d dagegen die leicht bewegliche, und deshalb nicht nur absolut, sondern auch relativ gerechnet, mit dem Strome oscillierende Kugel dar. Aus den zugehörigen Richtungen der Kraft entnimmt man die folgende Regel, welche im Falle der temporären Energiekraft die frühere allgemeine Regel ersetzen kann:

(A) *Eine leicht bewegliche Kugel wird in der Richtung abnehmender, eine schwer bewegliche in der Richtung zunehmender Stromintensität getrieben.*

Dieses entspricht genau dem bekannten FARADAY'schen Gesetze für die Bewegung ferromagnetischer und diamagnetischer Körper im magnetischen Felde, nur daſs wir immer wieder mit der entgegengesetzten Kraftrichtung zu rechnen haben. Denn das ferromagnetische Körperchen, welches in Bezug auf Polarität der leicht beweglichen Kugel entspricht, wird in der Richtung zunehmender, und das diamagnetische Körperchen, welches in Bezug auf Polarität der schwer beweglichen Kugel entspricht, wird in der Richtung abnehmender Intensität des Feldes getrieben.

Während ihrer Bewegung durch das Feld wird die temporär oscillierende Kugel ihre Oscillationsachse und Oscillationsintensität immer der Richtung und Intensität des Feldes anpassen. Wenn wir deshalb die Kraft nicht mehr auf das Feld, sondern auf den

Körper, welcher das Feld erzeugt, beziehen, so werden andere Abstandsgesetze herauskommen als im Falle der permanenten Kräfte. Das qualitative Ergebnis ist aber immer ein sehr einfaches. Denn da die Intensität des Stromfeldes immer zunimmt, je mehr man sich demjenigen Körper nähert, welcher dasselbe erzeugt, so findet man als unmittelbare Folge des vorhergehenden Gesetzes:

(B) *Eine leicht bewegliche Kugel wird von einer pulsierenden oder oscillierenden Kugel abgestoſsen, eine schwer bewegliche angezogen.*

Dieses entspricht wieder genau der Anziehung des Eisens, und der Abstoſsung des Wismuts durch den Magnet, nur mit der verkehrten Kraftrichtung, da in Bezug auf die Polarität das Eisen der leicht beweglichen, und das Wismut der schwer beweglichen Kugel entspricht.

# Zweiter Abschnitt.

## Quantitative Formulierung der Resultate.

**12. Diskussion des Ausgangspunktes der elementaren Ableitung.** — Die induktiv-elementare Ableitung der hydrodynamischen Fernwirkungserscheinungen hat nicht nur ein Interesse als ein neuer Eingang zu dem Studium dieser Erscheinungen neben dem streng mathematischen. Denn auch für den mathematischen Forscher wird eine leicht zu handhabende Ableitungsmethode einen bedeutenden Wert haben, wenn es sich darum handelt, neue Resultate vorauszugreifen, oder neue Aufgaben zu stellen. Um so wichtiger wird aber auch die Frage, ob die Methode wirklich den Kern der Sache trifft, und nur das weniger Wesentliche fortläſst. Wir werden diese Frage im folgenden etwas näher betrachten, um so mehr, als wir dadurch zu der Aufstellung einiger Formeln geführt werden, die für die Diskussion der Versuche von Bedeutung sind.

Das Auftriebsgesetz (2) läſst sich folgendermaſsen mathematisch formulieren, wenn $q$ die Dichte der Flüssigkeit, $\alpha, \beta, \gamma$ die Koordinaten, $\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}$ die Geschwindigkeitskomponenten, und $\ddot{\alpha}, \ddot{\beta}, \ddot{\gamma}$ die Beschleunigungskomponenten eines Partikelchens des Einfallsstromes sind: Eine Kugel von dem Volum $E$, welche die Translations-

bewegung der Flüssigkeit mitmacht, wird eine Auftriebskraft ($X, Y, Z$ erleiden, deren erste Komponente

$$X = qE\ddot{\alpha} \tag{a}$$

ist. Die zwei anderen ergeben sich, wenn wir $\ddot{\alpha}$ durch $\ddot{\beta}$ und $\ddot{\gamma}$ ersetzen.

Wenn wir von diesem, unter gewissen Verhältnissen gültigen, Gesetze die unter etwas veränderten Verhältnissen auftretenden Resultate induktiv ableiten, so beruht die Methode auf dem bekannten Prinzip von der „Variation der Konstanten“. Das eigentlich konstant vorausgesetzte $E$ lassen wir von der Zeit, das ursprünglich von Punkt zu Punkt unveränderliche $\ddot{\alpha}$ lassen wir von den Koordinaten abhängen, und geben die Beschränkung auf, daſs die Kugel die Translationsbewegung des Stromes mitmachen soll. Die Methode bleibt immer eine heuristisch-induktive, selbst wenn man nachträglich die Hilfsmittel findet, um die Richtigkeit der Resultate zu verificieren. Aber dazu kommt noch, daſs wir in dem vorliegenden Falle die Methode etwas auſserhalb des Gebietes anwenden, wo wir von ihr die vollständigen Resultate erwarten dürfen. Man hat allerdings keinen Grund zu zweifeln, daſs die Kraft (a) auch unter den verallgemeinerten Verhältnissen thätig bleibt, und ihre Werte stetig mit stetigen Änderungen von $E$ und $\ddot{\alpha}$ verändert. Aber es muſs auch von Anfang an mit der Möglichkeit gerechnet werden, daſs mit den Eigenbewegungen der Kugel zugleich ganz neue Kräfte in Wirksamkeit treten, welche sich nicht aus (a) ableiten lassen. Dies ist in der That auch der Fall, aber doch so, daſs die neuen Kräfte eine untergeordnete Rolle spielen, und das Resultat der Hauptsache nach nicht ändern.

Das Neue, welches hinzukommt, wenn die Kugel eine selbstständige Translationsbewegung besitzt, ist leicht vorauszusehen, wenn wir ein bekanntes Resultat zu Hilfe ziehen, nämlich das folgende: Eine Kugel, welche sich durch eine nicht strömende Flüssigkeit bewegt, erleidet einen Widerstand, als wäre ihre Masse mit der halben Masse des verdrängten Flüssigkeitsvolumens vergröſsert. (Vergl. I, **153**, S. 230.) Sind also $a, b, c$ die Koordinaten, $\dot{a}, \dot{b}, \dot{c}$ die Geschwindigkeitskomponenten, und $\ddot{a}, \ddot{b}, \ddot{c}$ die Beschleunigungskomponenten des Mittelpunktes der Kugel, so wird die erste Komponente dieses Widerstandes $-\frac{1}{2}qE\ddot{a}$ sein. Ist die Flüssigkeit eine strömende anstatt eine ruhende, so kann offenbar nur die Beschleunigung der Kugel relativ zu dem Strome in Frage kommen, und die neue zu (a)

hinzuzufügende Kraftkomponente wird $-\frac{1}{2} q E(\ddot{a} - \ddot{\alpha})$. Das frühere reine Auftriebsgesetz (a) ist dann durch das allgemeinere Auftriebs- und Trägheitsvergröfserungsgesetz

$$X = q E \ddot{\alpha} - \tfrac{1}{2} q E(\ddot{a} - \ddot{\alpha}) \tag{b}$$

oder

$$X = \tfrac{3}{2} q E \ddot{\alpha} - \tfrac{1}{2} q E \ddot{a} \tag{b'}$$

zu ersetzen, welches sich für $\ddot{a} = \ddot{\alpha}$ wieder auf das einfache Auftriebsgesetz (a) reduciert.

Ist die Bewegung der Kugel eine rein schwingende, und $\ddot{a}$ also eine Sinusfunktion der Zeit, so wird das letzte Glied rechts in (b′) in der Periode den Mittelwert Null haben', und für die Erzeugung einer progressiven Bewegung kommt nur die Partialkraft

$$X' = \tfrac{3}{2} q E \ddot{\alpha} \tag{b''}$$

in Frage. Mit diesem Ausdrucke als Ausgangspunkt führt, wie wir unten sehen werden, die Methode der Variation der Konstanten zu dem quantitativ richtigen Werte der progressiv bewegenden Kraft, welche die oscillierende Kugel angreift. Wenn wir dagegen von (a) ausgehen, so legen wir von Anfang an nur zwei Drittel der wirklich thätigen Kraft zu Grunde, und finden deshalb auch die Intensität der gesuchten Kraft um ein Drittel zu klein. Die Ursache dieses recht auffälligen Verhaltens ist zuletzt darin zu suchen, dafs die oscillierende Kugel durch ihre Bewegung gewissermafsen einen Gegenstrom gegen sich erzeugt, wie es besonders deutlich aus der Darstellung der Geschwindigkeitskomponenten Figur 6b, S. 49, oder aus dem Strombilde Figur 25, S. 154 des ersten Bandes hervorgeht. Die Kugel befindet sich deshalb immer in stärker beschleunigten Flüssigkeitsmassen, als in dem einfachen Auftriebsgesetze (a) vorausgesetzt wurde. Das qualitative Ergebnis wird aber genau dasselbe, sei es, dafs wir von (a) oder von (b′) ausgehen.

Wenn es sich um die Kraft gegen die pulsierende Kugel handelt, so findet man dagegen nicht nur qualitativ, sondern auch quantitativ das richtige Resultat, wenn man von dem einfachen Auftriebsgesetze (a) ausgeht, und zwar selbst wenn man neben der pulsierenden zugleich eine oscillierende Bewegung der Kugel voraussetzt. Denn solange der Einfallsstrom ein reiner Parallelstrom ist, tritt keine auf Oscillationen der Kugel beruhende Kraft auf, und die Verallgemeinerung der Formel (b), wo eine volumändernde Be-

wegung der Kugel neben der translatorischen explicite vorausgesetzt wurde, ist die folgende:

$$X = q\,E\,\ddot{a} - \tfrac{1}{2}\,q\,\frac{d}{d\,t}\{E(\dot{a} - \dot{\alpha})\}. \tag{c}$$

Man kommt auf diese Formel, wenn man in der ersten Formel (87), S. 130 des ersten Bandes $\dot{\alpha}_a = \dot{\alpha}_\beta = \dot{\alpha}_\gamma = 0$ setzt, so daſs sich der Strom auf einen einfachen Parallelstrom reduciert. In dieser Formel wird das letzte Glied in der Periode den Mittelwert Null haben, solange der Strom ein reiner Parallelstrom bleibt, und die Bewegung in synchronen Schwingungen besteht. Denn der Ausdruck unter dem Zeichen $\frac{d}{d\,t}$ ist dann eine periodische Funktion der Zeit, und die Zeitableitung einer solchen hat immer den Mittelwert Null in der Periode, wie sich leicht nachweisen läſst (vergl. I, **21**). Für die Berechnung der Kraft gegen die pulsierende Kugel im Parallelstrome kommt also nur das erste Glied rechts in (c), oder die Kraft (a) in Frage. Wenn man aber von (c) die Kraft gegen die oscillierende Kugel in einem Strome veränderlicher Richtung und Intensität ableiten will, so sind $\dot{\alpha}$ und $\ddot{\alpha}$ die zu variierenden Gröſsen, und das letzte Glied in (c) hat nicht mehr den Mittelwert Null, so daſs man zu demselben Resultate kommt, als wenn man von (b″) ausginge.

Nach diesen Bemerkungen über den Ausgangspunkt der elementaren Ableitung wird es klar sein, daſs man durch sie nie einen definitiv befriedigenden Beweis gewinnen kann. Denn in dem Ausgangspunkt selbst liegen Verwickelungen vor, welche man nicht ohne eine tiefere dynamische Analyse durchschauen kann. Die Hauptsache berühren aber diese Verwickelungen nicht. Die Resultate der elementaren Ableitung werden immer qualitativ und auch quantitativ richtig, wenn wir, in der Kenntnis der angedeuteten Verwickelungen, im Falle der pulsierenden Kugel von (a), und im Falle der oscillierenden von (b″) ausgehen.

**13. Zur Berechnung von Mittelwerten.** — Wenn in der obigen Formel (a) das Volumen $E$ der Kugel periodisch veränderlich ist, so wird man, um die progressiv bewegende Kraft zu finden, den Mittelwert des Ausdruckes $E\,\ddot{\alpha}$ zu berechnen haben. In ein Aggregat ganz ähnlicher Ausdrücke löst sich das variierte $\ddot{\alpha}$ auf, wenn man die Kraft gegen die oscillierende Kugel berechnen will. Einleitend betrachten wir deshalb ganz allgemein den Mittelwert eines Aus-

druckes der Form $p\ddot{q}$, wo $p$ und $q$ Parameter sind, welche periodisch und synchron von der Zeit abhängen. Die Parameter und ihre Ableitungen sind also durch die Ausdrücke

$$\text{(a)}\qquad \begin{aligned} p &= p_0 + p_1 \sin 2\pi n t & q &= q_0 + q_1 \sin 2\pi n t \\ \dot{p} &= 2\pi n p_1 \cos 2\pi n t & \dot{q} &= 2\pi n q_1 \cos 2\pi n t \\ \ddot{p} &= -4\pi^2 n^2 p_1 \sin 2\pi n t & \ddot{q} &= -4\pi^2 n^2 q_1 \sin 2\pi n t \end{aligned}$$

gegeben, wo $n$ die gemeinschaftliche Schwingungszahl, $p_1$ und $q_1$ die Amplituden der Schwingungen darstellen.

Das hier in Frage kommende Produkt des einen Parameters in die zweite Ableitung des anderen:

$$\text{(b)}\qquad p\ddot{q} = -4\pi^2 n^2 p_0 q_1 \sin 2\pi n t - 4\pi^2 n^2 p_1 q_1 \sin^2 2\pi n t$$

vergleichen wir mit dem negativen Produkt der zwei ersten Zeitableitungen der beiden Parameter:

$$\text{(b')}\qquad -\dot{p}\dot{q} = -4\pi^2 n^2 p_1 q_1 \cos^2 2\pi n t.$$

Man sieht dann sofort, daſs beide in der Periode denselben Mittelwert haben. Denn das erste Glied rechts in (b) kommt nicht in Frage, da der Sinus in der Periode den Mittelwert Null hat, und das zweite Glied rechts in (b) unterscheidet sich von dem rechten Glied in (b') nur dadurch, daſs im einen $\sin^2$ und im anderen $\cos^2$ vorkommt, welche beide in der Periode denselben Mittelwert, nämlich $\frac{1}{2}$, haben. Es ergiebt sich also, wenn wir den Mittelwert durch Index 0 bezeichnen,

$$(p\ddot{q})_0 = (-\dot{p}\dot{q})_0 = -2\pi^2 n^2 p_1 q_1 = -\left(\sqrt{2}\pi n p_1\right)\left(\sqrt{2}\pi n q_1\right).$$

Als Maſs der mittleren Intensität der Bewegung, welche durch einen Parameter der Form (a) gegeben ist, können wir nun den quadratischen Mittelwert der ersten Zeitableitung, oder der Geschwindigkeit, einführen. Zur Berechnung derselben haben wir

$$\dot{p}^2 = 4\pi^2 n^2 p_1^2 \cos^2 2\pi n t,$$

welches in der Periode den Mittelwert

$$(\dot{p}^2)_0 = 2\pi^2 n^2 p_1^2$$

hat. Die Quadratwurzel giebt dann den gesuchten quadratischen Mittelwert

(c) $$\dot{p}_m = \sqrt{2}\,\pi\, n\, p_1 .$$

Also:

(A) *Das Mafs der mittleren Intensität einer nach einem einfachen Sinusgesetze verlaufenden schwingenden Bewegung erhält man, wenn man das Produkt von Amplitude und Schwingungszahl mit dem numerischen Faktor $\sqrt{2}\,\pi$ multipliciert.*

Mit Hilfe der somit definierten quadratischen Mittelwerte läfst sich nun die obige Relation zwischen Mittelwerten in der Form

(d) $$(p\,\ddot{q})_0 = -(\dot{p}\,\dot{q})_0 = -\dot{q}_m \dot{p}_m$$

schreiben. Diese Gleichung ist, wie man leicht sieht, auch mit der Definition von Vorzeichen für die quadratischen Mittelwerte verträglich, wenn man sie nach der Regel 4 festsetzt. Das heifst, man giebt $\dot{p}_m$ und $\dot{q}_m$ diejenigen Vorzeichen, welche die entsprechenden Geschwindigkeiten $\dot{p}$ und $\dot{q}$ zu einer gewählten Anfangszeit haben.

Für die Berechnung der Mittelwerte von Produkten der betrachteten Art enthält also Formel (d) folgende praktische Regel:

(B) *Wenn zwei Parameter synchrone Sinusschwingungen darstellen, so hat das Produkt des einen in die zweite Zeitableitung des anderen denselben Mittelwert wie das negative Produkt der beiden ersten Zeitableitungen, das heifst der beiden Geschwindigkeiten.*

*Das letztere Produkt stellt zugleich den Mittelwert selbst dar, wenn man die Faktoren nicht mehr als die Geschwindigkeiten selbst, sondern als ihre mit Vorzeichen versehenen quadratischen Mittelwerte interpretiert.*

**14. Pulsierende Kugel und pulsierendes Kugelpaar.** — Wenn im Ausdrucke der Kraft 12 (a) das Volumen $E$ der Kugel periodisch veränderlich ist, so kommt die aufgestellte Regel sofort zur Anwendung. Eine Kraft, welche denselben Mittelwert wie 12 (a) hat, ist

(a) $$X_e = -q\,\dot{E}\,\dot{\alpha},$$

wo $\dot{E}$ die Volumänderungsgeschwindigkeit der Kugel ist, und $\dot{\alpha}$ die erste Geschwindigkeitskomponente des Einfallsstromes. Weiter stellt diese Formel den Mittelwert selbst dar, wenn wir $\dot{E}$ und $\dot{\alpha}$ nicht mehr als die Geschwindigkeiten selbst, sondern als die quadratischen

Mittelwerte derselben interpretieren. Bei dieser Interpretation nennen wir $\acute{E}$ die Pulsationsintensität der Kugel, und $\acute{\alpha}$ die erste Komponente der Oscillationsintensität des Einfallsstromes.

Stellt $\acute{\sigma}$ die Resultantgeschwindigkeit, beziehungsweise die resultierende Oscillationsintensität im Strome dar, so wird die Resultantkraft

$$F_e = -q\acute{E}\acute{\sigma}. \tag{a'}$$

Ganz allgemein ist also die Energiekraft, welche die pulsierende Kugel in einem mit ihr synchron oscillierenden Strom angreift, gleich dem negativ genommenen Produkt der Pulsationsintensität der Kugel in die Oscillationsintensität des Einfallsstromes und die Dichte der Flüssigkeit.

Bei einem pulsierenden Kugelpaar nennen wir das Produkt

$$S = \acute{E}l \tag{b}$$

der Pulsationsintensität $\acute{E}$ der positiven Kugel in den Centralabstand $l$ beider Kugeln das Aktionsmoment des Kugelpaares. Die positive Richtung desselben ist von der negativen zu der positiven Kugel.

Im homogenen Strome wird die positive Kugel von der Kraft (a'), und die negative von einer gleich grofsen und entgegengesetzt gerichteten Kraft angegriffen. Ist $\theta$ der Winkel zwischen der Achse des Kugelpaares und der positiven Richtung des Stromes, so ergiebt sich, genau wie im Falle eines Magnets im magnetischen Felde, ein Kräftepaar:

$$\Theta = q\acute{\sigma}\acute{S}\sin\theta. \tag{c}$$

Dieses Kräftepaar sucht, entgegengesetzt dem Kräftepaare, welches einen Magnet angreift, den Winkel $\theta$ zu vergröfsern, und die stabile Gleichgewichtslage wird erreicht, wenn $\theta = \pi$, so dafs die Achse des Kugelpaares gegen die positive Richtung des Feldes gerichtet ist.

Ist der Einfallsstrom nicht homogen, sondern hat im Mittelpunkte der positiven Kugel die Intensität $(\acute{\alpha}, \acute{\beta}, \acute{\gamma})$ und im Mittelpunkte der negativen Kugel die Intensität $(\acute{\alpha}', \acute{\beta}', \acute{\gamma}')$, so wird nach (a) die Summe der entsprechenden Kraftkomponenten

$$X_e = -q\acute{E}(\acute{\alpha} - \acute{\alpha}').$$

Als Gröfsen, welche die Veränderlichkeit der Strom- oder Oscillationsintensität von Punkt zu Punkt angeben, können wir nun die räumlichen Ableitungen der Gröfsen $\acute{\alpha}$, $\acute{\beta}$, $\acute{\gamma}$ einführen.

Diese sind $\frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial x}, \frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial y}, \ldots \frac{\partial \dot{\beta}}{\partial x}, \ldots$ wenn $x, y, z$ die Koordinaten geometrischer Raumpunkte darstellen. Nach vollführter Differentiation soll $x = a$, $y = b$, $z = c$ substituiert werden, wo $a, b, c$ die Koordinaten eines Punktes des Kugelpaares sind, beispielsweise des Mittelpunktes der positiven Kugel. Ob wir den Mittelpunkt der einen oder der anderen Kugel wählen, ist nämlich gleichgültig, da wir annehmen, daſs die Ableitungen nicht merkbar veränderliche Werte innerhalb des von dem Kugelpaare eingenommenen Raumes haben. Wenn wir nun ausdrücklich voraussetzen, daſs die Ausdrücke von $\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}$ nicht schon früher die Gröſsen $a, b, c$ enthalten, so können wir die Substitution $x = a, \ldots$ auch vor der Differentiation machen, und die Ableitungen in der Form $\frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial a}, \ldots$ schreiben. Sind dann $a, b, c$ die Koordinaten des Mittelpunktes der positiven Kugel, $a', b', c'$ die des Mittelpunktes der negativen, so wird nach dem TAYLOR'schen Theoreme

$$\dot{\alpha} - \dot{\alpha}' = \frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial a}(a - a') + \frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial b}(b - b') + \frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial c}(c - c').$$

Die Gröſsen $a - a'$, $b - b'$, $c - c'$ sind die Projektionen des Centralabstandes $l$ der Kugeln. Stellen deshalb $\theta_x$, $\theta_y$, $\theta_z$ die Winkel dar, welche diese Linie mit den Achsen bildet, so wird

$$\dot{\alpha} - \dot{\alpha}' = l\left\{\frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial a}\cos\theta_x + \frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial b}\cos\theta_y + \frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial c}\cos\theta_z\right\}.$$

Wird dieses in den Ausdruck von $X_e$ eingesetzt, und nach (b) das Aktionsmoment eingeführt, so wird

$$\text{(d)} \qquad X_e = -q\dot{S}\left\{\frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial a}\cos\theta_x + \frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial b}\cos\theta_y + \frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial c}\cos\theta_z\right\}.$$

Die weitere Diskussion dieser Formel für die Energiekraft gegen ein pulsierendes Kugelpaar schieben wir auf, bis wir unten gezeigt haben, daſs dieselbe Formel die Kraft gegen die oscillierende Kugel darstellt.

**15. Oscillierende Kugel.** — Wenn die Kugel konstantes Volumen hat, so wird die Formel 12(b″) unseren Ausgangspunkt bilden, oder auch, wenn wir anstatt den Komponenten $X, Y, Z$ die Resultante $F$ betrachten:

$$F = \tfrac{3}{2} q E \dot{\sigma}.$$

Da wir uns den Einfallsstrom durch die Kugel fortgesetzt denken, können wir auch von dem Partikelchen dieses Stromes reden, das augenblicklich mit dem Mittelpunkte der Kugel zusammenfällt. $\ddot{\sigma}$ stellt immer die Beschleunigung eben dieses Partikelchens dar. Die verschiedenen Partikelchen, mit welchen der Mittelpunkt der Kugel während ihrer Bewegung zusammenfällt, bilden eine gerade Linie, welche die Bewegung des Stromes mitmacht. Der Abstand des Kugelmittelpunktes von dem Mittelpunkte dieser Linie sei durch $s$, und der Winkel dieser Linie mit den Stromlinien durch $\theta$ bezeichnet. In Bezug auf den Mittelpunkt dieser Linie hat dann die Kraft $F$ das Drehungsmoment $Fs \sin\theta$ oder $\frac{3}{2} q E \sin\theta \cdot s \ddot{\sigma}$. Hier sind $s$ und $\sigma$ periodisch und synchron veränderliche Parameter, und wenn wir uns nur um den Mittelwert kümmern, so können wir nach **13** (B) $\frac{3}{2} q E \sin\theta \cdot \dot{s} \dot{\sigma}$ schreiben. Führen wir schliefslich

(a) $$\dot{S} = \tfrac{3}{2} E \dot{s}$$

ein, so wird das Drehungsmoment

(b) $$\Theta = q \dot{\sigma} \dot{S} \sin\theta,$$

genau entsprechend der Gleichung **14** (c), welche das auf ein pulsierendes Kugelpaar wirkende Drehungsmoment giebt. $\dot{S}$ heifst das Aktionsmoment der oscillierenden Kugel, und ist nach (a) definiert als das dreihalbfache Produkt von Volumen und Oscillationsintensität der Kugel. Dabei sind die Oscillationen der Kugel nur relativ zu dem Strome in Rechnung gezogen.

Zur Berechnung der progressiv bewegenden Kraft legen wir, anstatt der Resultante $F$, besser ihre erste Komponente $X$, nach **12** (b″), zu Grunde:

$$X = \tfrac{3}{2} q E \ddot{\alpha}.$$

Die Resultante wird nur dann einen von Null verschiedenen Mittelwert haben, wenn die Kugel zwischen verschieden bewegten Partien eines von Punkt zu Punkt veränderlichen Stromes oscilliert. $\ddot{\alpha}$ stellt dabei immer die Beschleunigung desjenigen Partikelchens des Einfallsstromes dar, welches momentan mit dem Mittelpunkte der Kugel zusammenfällt.

Nun seien $\alpha, \beta, \gamma$ die fortlaufenden Koordinaten eines beliebigen Punktes des Einfallsstromes, und $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ die Koordinaten desjenigen bestimmten Punktes, der mit dem Mittelpunkte der Kugel

zusammenfällt, zur Zeit, wenn sie ihre mittlere Lage passiert. Für die Beschleunigung eines beliebigen Punktes in der Nähe von $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ hat man nun nach dem TAYLOR'schen Theorem

$$\ddot{\alpha} = \ddot{\alpha}_0 + \left(\frac{\partial \ddot{\alpha}}{\partial \alpha}\right)_0 (\alpha - \alpha_0) + \left(\frac{\partial \ddot{\alpha}}{\partial \beta}\right)_0 (\beta - \beta_0) + \left(\frac{\partial \ddot{\alpha}}{\partial \gamma}\right)_0 (\gamma - \gamma_0).$$

$\ddot{\alpha}_0$ ist hier die Beschleunigung des Punktes $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ und deshalb eine reine Sinusfunktion, welche den Mittelwert Null in der Periode hat. Der den Ableitungen beigefügte Index 0 bedeutet wie gewöhnlich, dafs man sich nach vollführter Differentiation die Substitution $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \beta_0$, $\gamma = \gamma_0$ ausgeführt zu denken hat. Die Koefficienten $\left(\frac{\partial \ddot{\alpha}}{\partial \alpha}\right)_0, \ldots$ werden genau wie $\ddot{\alpha}_0$ Sinusfunktionen der Zeit sein. In den Differenzen $\alpha - \alpha_0$, $\beta - \beta_0$, $\gamma - \gamma_0$ kommen schliefslich nur diejenigen Werte von $\alpha, \beta, \gamma$ in Frage, für welche die Relationen $\alpha = a$, $\beta = b$, $\gamma = c$ bestehen, wo $a, b, c$ die Koordinaten des Mittelpunktes der Kugel sind. Der Ausdruck von $\ddot{\alpha}$ kann also genauer

$$\ddot{\alpha} = \ddot{\alpha}_0 + \left(\frac{\partial \ddot{\alpha}}{\partial \alpha}\right)_0 (a - \alpha_0) + \left(\frac{\partial \ddot{\alpha}}{\partial \beta}\right)_0 (b - \beta_0) + \left(\frac{\partial \ddot{\alpha}}{\partial \gamma}\right)_0 (c - \gamma_0)$$

geschrieben werden. $a - \alpha_0$, $b - \beta_0$, $c - \gamma_0$ sind die Projektionen des Abstandes des Mittelpunktes der Kugel von dem Punkte $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ des Einfallsstromes, also Sinusfunktionen der Zeit. Wenn wir deshalb zum Mittelwert übergehen, so können wir $\ddot{\alpha}_0$ fortlassen, und nach der Regel **13** (B)

$$(\ddot{\alpha})_m = -\left(\frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial \alpha}\right)_0 (\dot{a} - \dot{\alpha}_0) - \left(\frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial \beta}\right)_0 (\dot{b} - \dot{\beta}_0) - \left(\frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial \gamma}\right)_0 (\dot{c} - \dot{\gamma}_0)$$

schreiben. Schliefslich wird es nur einen unendlich kleinen Unterschied ausmachen, wenn wir in den Ableitungen anstatt $\alpha = \alpha_0$ etc., $\alpha = a$, $\beta = b$, $\gamma = c$ substituieren. Denn bei sehr kleinen Schwingungen der Kugel werden $a, b, c$ immer nur sehr wenig von $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ abweichen. Die Ableitungen können wir dann wie früher durch $\frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial a}, \ldots$ bezeichnen. Die Differenzen $\dot{a} - \dot{\alpha}_0$, $\dot{b} - \dot{\beta}_0$, $\dot{c} - \dot{\gamma}_0$ sind die Komponenten der Geschwindigkeit $\dot{s}$ der Kugel relativ zu dem Strome. Führen wir diese ein und zugleich die Winkel $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ derjenigen materiellen Linie im Strome, längs deren der Mittelpunkt der Kugel schwingt, so wird

$$\dot{\alpha}_m = -\dot{s}\left\{\frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial a}\cos\theta_x + \frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial b}\cos\theta_y + \frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial c}\cos\theta_z\right\}.$$

Setzen wir dieses in den Ausdruck der Kraftkomponente $X$ ein, und benutzen die Definition (a) des Aktionsmomentes, so finden wir als Ausdruck der Energiekraft gegen die oscillierende Kugel

$$\text{(c)} \qquad X_e = -q\dot{S}\left\{\frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial a}\cos\theta_x + \frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial b}\cos\theta_y + \frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial c}\cos\theta_z\right\}.$$

Diese Formel ist mit der entsprechenden **14** (d) für das pulsierende Kugelpaar identisch.

Um den Inhalt dieser Formel genauer zu diskutieren, können wir zunächst bemerken, daſs innerhalb der Parenthese mit der Gröſse $\dot{\alpha}$ die Operation ausgeführt wird, welche man eine Differentiation nach einer Achse zu nennen pflegt. Mit der üblichen abgekürzten Bezeichnung läſst sich deshalb $X_e$, und ganz entsprechend $Y_e$ und $Z_e$

$$\text{(d)} \qquad X_e = -q\dot{S}\frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial s}, \quad Y_e = -q\dot{S}\frac{\partial \dot{\beta}}{\partial s}, \quad Z_e = -q\dot{S}\frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial s}$$

schreiben. Dieser Ausdruck der Energiekraft gegen eine oscillierende Kugel oder gegen ein pulsierendes Kugelpaar kann als der fundamentale betrachtet werden, welcher in allen Strömen gültig ist. Ist aber der Strom, wie wir voraussetzen, wirbelfrei, so können wir zu einer anderen, und meistens zweckmäſsigeren Form gelangen. Denn es bestehen dann die bekannten Relationen

$$\frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial b} = \frac{\partial \dot{\beta}}{\partial c}, \quad \frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial c} = \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial a}, \quad \frac{\partial \dot{\beta}}{\partial a} = \frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial b},$$

wonach

$$X_e = -q\dot{S}\left\{\frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial a}\cos\theta_x + \frac{\partial \dot{\beta}}{\partial a}\cos\theta_y + \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial a}\cos\theta_z\right\}$$

wird. Wir stellen uns hier vor, daſs die Winkel $\theta_x$, $\theta_y$, $\theta_z$ dauernd, also auch nach einer beliebigen Verschiebung die Richtung des Aktionsmomentes darstellen. Diese Winkel können, wenn wir die allgemeinsten Voraussetzungen machen, infolge der Verschiebungen sich verändern, und somit als Funktionen von $a, b, c$ auftreten. Neben diesen Winkeln führen wir aber auch $\theta_x^0$, $\theta_y^0$, $\theta_z^0$ ein, die sich auf die Richtung der Oscillationsachse in der Ausgangslage beziehen sollen, und somit von $a, b, c$ unabhängige Gröſsen sind. Führen wir diese ein, so läſst sich der Ausdruck $X_e$ in der Form

$$X_\epsilon = -q\dot{S}\frac{\partial}{\partial a}\{\dot{\alpha}\cos\theta_x^0 + \dot{\beta}\cos\theta_y^0 + \dot{\gamma}\cos\theta_z^0\}$$

darstellen. In der Parenthese steht hier die Projektion des Einfallsstromes auf die Oscillationsachse der Kugel. Bezeichnen wir mit $\theta$ den Winkel, welchen die Oscillationsachse mit dem Einfallsstrome bildet, so können wir $-\dot{\sigma}\cos\theta_0$ den Gegenstrom gegen die Oscillationen der Kugel nennen. Die Kraftkomponenten lassen sich dann durch

$$\text{(e)}\quad X_\epsilon = q\dot{S}\frac{\partial}{\partial a}(-\dot{\sigma}\cos\theta_0),\quad Y_\epsilon = q\dot{S}\frac{\partial}{\partial b}(-\dot{\sigma}\cos\theta_0),\quad Z_\epsilon = q\dot{S}\frac{\partial}{\partial c}(-\dot{\sigma}\cos\theta_0)$$

ausdrücken. Schliefslich läfst sich das Drehungsmoment ganz entsprechend

$$\text{(e')}\qquad \Theta = q\dot{S}\frac{\partial}{\partial\theta_0}(-\dot{\sigma}\cos\theta_0)$$

schreiben. Diese Formeln (e) und (e') drücken quantitativ das Resultat 8 aus, dafs sich die Kugel in der Richtung zu verschieben oder zu drehen sucht, wo der gröfste Gegenstrom gegen ihre Achse zu finden ist.

**16. Permanente und temporäre Kräfte.** — Hat die Kugel dieselbe Dichte wie die Flüssigkeit, so zwingt sie die Induktionskraft, die Bewegung der Flüssigkeit genau mitzumachen. Eine Oscillation der Kugel relativ zu dem Strome kann in diesem Falle nur auf der Einwirkung nicht hydrodynamischer Kräfte beruhen, beispielsweise innerer elastischer Kräfte der Kugel. Das Aktionsmoment wird dann durch Verschiebungen im Strome nicht geändert werden. Die Gröfsen $\dot{S}$ und $\theta$ sind also von $a, b, c$ unabhängig, und die Kraftkomponenten $X, Y, Z$ sowie das Drehungsmoment $\Theta$ lassen sich als die partiellen Ableitungen nach $a, b, c$ von einer einzigen Funktion

$$\text{(a)}\qquad \Psi = -q\dot{\sigma}\dot{S}\cos\theta$$

darstellen. Dieses $\Psi$ ist dann die Kräftefunktion der permanenten Energiekraft.

Andererseits können wir die Beschränkung in Bezug auf die Dichte der Kugel fallen lassen, aber gleichzeitig annehmen, dafs keine fremden Kräfte oscillationserzeugend wirken. Hat die Kugel unveränderliches Volumen, so läfst sich die Formel 12 (b') für die

Berechnung der von dem Strome inducierten Oscillationen anwenden. Ist $Q$ die Dichte der Kugel, und $E$ ihr Volum, so wird $QE$ ihre Masse darstellen. Die Gleichung für ihre Bewegung längs der Abscissenachse wird also $QE\ddot{a} = X$. Setzen wir nach **12** (b′) den Wert von $X$ ein, und lassen den gemeinschaftlichen Faktor $E$ weg, so wird

$$Q\ddot{a} = \tfrac{3}{2} q \ddot{\alpha} - \tfrac{1}{2} q \ddot{a},$$

also durch Auflösung nach $\ddot{a}$

$$\ddot{a} = \frac{\tfrac{3}{2} q}{Q + \tfrac{1}{2} q} \ddot{\alpha}.$$

Wenn wir nach der Zeit integrieren, unter den Anfangsbedingungen $t = t_0$, $\dot{a} = 0$, $\dot{\alpha} = 0$, welche zur Zeit des Durchganges durch eine Umkehrlage erfüllt sind, so ergiebt sich

$$\dot{a} = \frac{\tfrac{3}{2} q}{Q + \tfrac{1}{2} q} \dot{\alpha}.$$

Die Formel zeigt, daſs die Geschwindigkeit, welche die Induktionskraft der Kugel mitteilt, zwischen den Grenzen 0 und der dreifachen Geschwindigkeit des Stromes liegt. Der erste Grenzwert tritt für $\frac{q}{Q} = 0$ ein, wenn die Kugel relativ zu der Flüssigkeit unendlich groſse, der andere Grenzfall für $\frac{Q}{q} = 0$, wenn die Kugel relativ zu der Flüssigkeit unendlich kleine Trägheit hat. In demselben Verhältnisse wie die Geschwindigkeiten stehen die Amplituden der Schwingungen.

Die Geschwindigkeitskomponente der Kugel relativ zu dem Strome wird

$$\dot{a} - \dot{\alpha} = \frac{q - Q}{Q + \tfrac{1}{2} q} \dot{\alpha},$$

oder, wenn $\dot{s}$ die Resultante dieser relativen Geschwindigkeit, und $\dot{\sigma}$ die Resultantgeschwindigkeit des Stromes darstellt:

$$\dot{s} = \frac{q - Q}{Q + \tfrac{1}{2} q} \dot{\sigma}.$$

Das temporäre inducierte Aktionsmoment der Kugel wird deshalb nach **15** (a)

$$\dot{S} = \tfrac{3}{2} \frac{q - Q}{Q + \tfrac{1}{2} q} E \dot{\sigma}.$$

Setzen wir dies in den Ausdruck **15** (e) der $X$-Komponente der Kraft ein und erinnern uns, dafs der Winkel zwischen dem inducierten Aktionsmomente und dem Strome dauernd gleich Null ist, so wird

$$X_e = \tfrac{3}{2} q \frac{q - Q}{Q + \frac{1}{2} q} E \dot{\sigma} \frac{\partial}{\partial a}(-\dot{\sigma}) = \frac{\partial}{\partial a}\left[-\tfrac{3}{4} q \frac{q - Q}{Q + \frac{1}{2} q} E \dot{\sigma}^2\right].$$

Die Kraftkomponenten lassen sich also als die Ableitungen längs den Koordinaten von der Kräftefunktion

(b) $$\Psi = -\tfrac{3}{4} q \frac{q - Q}{Q + \frac{1}{2} q} E \dot{\sigma}^2$$

darstellen. Diese Kräftefunktion ist der kinetischen Energie des Einfallsstromes proportional, und die Formel zeigt, dafs eine Kugel von kleinerer Dichte als die Flüssigkeit in der Richtung abnehmender Energie, eine Kugel gröfserer Dichte in der Richtung zunehmender Energie des Stromes getrieben wird. [Vergl. **11** (A)].

Wir haben jetzt alle Formeln aufgestellt, welche die Beziehung der progressiv bewegenden Kräfte zu dem Strome angeben, und alle stimmen mit den im ersten Bande durch streng mathematische Ableitung gefundenen Formeln überein. Die Formeln **14** (a) oder (a') für die auf eine pulsierende Kugel wirkende Kraft entsprechen I, **129** (a), nur dafs man sich an $\bar{E} = q \dot{E}$ zu erinnern hat. Die Formeln **15** (e) und (e') geben den Regeln I, **131** (B) und **142** (B) über den Zuwachs der virtuellen Konfliktsgeschwindigkeit mathematische Form. Die Kräftefunktion **16** (a), aus welcher man die verschiebenden und drehenden Kraftwirkungen permanenter Natur ableitet, ist mit der entsprechenden Kräftefunktion I, **133** (e) und **142** (c) identisch, da man $\bar{S} = q \dot{S}$ hat. Schliefslich ist die Kräftefunktion (b) für die temporäre Energiekraft mit der Kräftefunktion I, **134** (d) identisch.

Diese Übereinstimmungen zeigen deutlich, dafs die elementare Ableitungsmethode wirklich das Wesentliche trifft, selbst wenn sie, aus Gründen, die wir auseinandergesetzt haben, nie eine völlig strenge werden kann.

**17. Fernwirkungsformeln.** — Wenn man die Ausdrücke der Ströme kennt, welche die pulsierenden und oscillierenden Kugeln in der umgebenden Flüssigkeit erzeugen, so kann man sofort, mit Hilfe der oben entwickelten Kräfteformeln, die Ausdrücke der

zwischen pulsierenden und oscillierenden Kugeln auftretenden scheinbaren Fernkräfte aufstellen.

Was zunächst die pulsierende Kugel betrifft, so findet man ohne jede Schwierigkeit den Ausdruck des Stromes. Die Geschwindigkeit mufs aus Symmetriegründen rein radial sein, und denselben Wert in allen Punkten einer mit der pulsierenden konzentrischen Kugel haben. Ist $\dot{E}$ die Volumänderungsgeschwindigkeit, so mufs pro Zeiteinheit eine Flüssigkeitsmasse $\dot{E}$ jede die Kugel umschliefsende Fläche durchströmen. Da eine Kugelfläche mit dem Radius $r$ die Oberfläche $4\pi r^2$ hat, wird also die Geschwindigkeit $\dot{\sigma}$ des Stromes in einem beliebigen Punkte dieser Kugelfläche

$$\dot{\sigma} = \frac{\dot{E}}{4\pi r^2}$$

sein. Setzt man diesen Wert der Geschwindigkeit $\dot{\sigma}$ in die Formel **14**(a′) ein, so findet man als Ausdruck der scheinbaren Fernkraft zwischen zwei pulsierenden Kugeln mit den Pulsationsintensitäten $\dot{E}$ und $\dot{E}'$:

(a) $$F = -q\frac{\dot{E}\dot{E}'}{4\pi r^2}.$$

Diese Kraft läfst sich als die positive Ableitung nach $r$ von der Kräftefunktion

(b) $$\Psi = q\frac{\dot{E}\dot{E}'}{4\pi r}$$

darstellen.

Von dieser Formel kommt man zu der Kräftefunktion für die Wechselwirkung zwischen einer pulsierenden Kugel und einem pulsierenden Kugelpaar in genau derselben Weise, wie man in der Lehre vom Magnetismus von der Kräftefunktion, welche die Wechselwirkung zweier Magnetpole darstellt, zu der Kräftefunktion für die Wechselwirkung eines Pols und eines Elementarmagnets übergeht. Wenn $\dot{S}$ das Aktionsmoment des Kugelpaares ist, und $\frac{\partial}{\partial s}$ eine Differentiation nach der Achse dieses Kugelpaares bedeutet, so wird die gesuchte Kräftefunktion

(c) $$\Psi = q\dot{E}\dot{S}\frac{\partial}{\partial s}\,\frac{1}{4\pi r}.$$

Ganz entsprechend ist der Übergang zu der Kräftefunktion, welche die Wechselwirkung zweier pulsierenden Kugelpaare darstellt. Man findet, wenn $\dot{S}$ und $\dot{S}'$ die zwei Aktionsmomente darstellen

(d) $$\Psi = q \dot{S} \dot{S}' \frac{\partial^2}{\partial s \partial s'} \frac{1}{4 \pi r},$$

analog der Kräftefunktion für die Wechselwirkung zweier Elementarmagnete.

Die Formel (b) giebt auch die Wechselwirkung zwischen einer pulsierenden und einer oscillierenden Kugel, die Formel (c) die Wechselwirkung zwischen zwei oscillierenden Kugeln. Der strenge Nachweis erfordert aber, dafs man beweist, dafs oscillierende Kugel und pulsierendes Kugelpaar bei gleichem Werte des Aktionsmomentes in genügender Entfernung identisch denselben Strom erzeugen. Dieses kann wieder nur durch ein tieferes Eingehen auf die Mechanik der Flüssigkeiten geschehen, die elementare Überlegung (8) läfst nur erkennen, dafs jedenfalls eine grofse Ähnlichkeit der beiden Felder vorhanden sein mufs.

Wir stellen zuletzt noch für einige spezielle Fälle, welche in den folgenden Versuchen oft vorkommen werden, die expliciten Ausdrücke der Kräfte auf, welche man aus (c) und (d) ableitet (vergl. I, **198**, **200** und **201**).

Wenn die oscillierende Kugel relativ zu der pulsierenden longitudinal schwingt (Figur 6a und b), so wirkt eine Anziehungs- oder Abstofsungskraft:

($e_1$) $$F = \mp 2 q \frac{\dot{E} \dot{S}}{4 \pi r^3}.$$

Im Falle transversaler Oscillationen sucht das Drehungsmoment

($e_2$) $$\Theta = - q \frac{\dot{E} \dot{S}}{4 \pi r^3}$$

den Winkel zwischen der Oscillationsachse und der Verbindungslinie zu der pulsierenden Kugel zu verkleinern.

Oscillieren zwei Kugeln longitudinal (Figur 7a und b), so wirkt eine reine Anziehungs- oder Abstofsungskraft:

($f_1$) $$F = \mp 6 q \frac{\dot{S} \dot{S}'}{4 \pi r^4}.$$

Bei den parallel-transversalen Oscillationen (Figur 7c und d) wirkt die halb so grofse Anziehungs- oder Abstofsungskraft:

($f_2$) $$F = \mp 3 q \frac{\dot{S} \dot{S}'}{4 \pi r^4}.$$

Oscilliert die eine Kugel längs, und die andere senkrecht zu der Verbindungslinie, so wirken zwei Drehungsmomente. Das erste sucht den Winkel zwischen der Oscillationsachse der transversal schwingenden Kugel und der Verbindungslinie mit der anderen zu verkleinern (Figur 7e) und hat den Wert:

$$(f_3)\qquad \Theta = -2q\frac{\dot{S}\dot{S}'}{4\pi r^3}.$$

Das zweite sucht den Winkel zwischen der Achse der longitudinal oscillierenden Kugel und der Verbindungslinie mit der transversal oscillierenden zu vergröfsern (Figur 7f) und hat den halb so grofsen Wert:

$$(f_4)\qquad \Theta = q\frac{\dot{S}\dot{S}'}{4\pi r^3}.$$

Wenn schliefslich die Oscillationsachsen der Kugeln sowohl zu einander wie zu der Verbindungslinie der Kugeln senkrecht sind, so sucht ein Drehungsmoment den Winkel zwischen den zwei Ebenen zu verkleinern, welche durch die Verbindungslinie der Kugeln und die zwei Oscillationsachsen bestimmt sind (Figur 7g). Dieses Drehungsmoment ist

$$(f_5)\qquad \Theta = -q\frac{\dot{S}\dot{S}'}{4\pi r^3}$$

und hat also denselben Betrag wie $(f_4)$, nur mit dem entgegengesetzten Vorzeichen.

**18. Zur Frage von der Umkehrung der hydrodynamischen Energiekraft.** — Wir haben oben auf den heuristischen Wert der elementaren Ableitungsmethode hingedeutet. Denn durch sie wird die Aufmerksamkeit nur auf die Hauptsache gerichtet, während alle die Nebenbedingungen, welche bei der stringent mathematischen Methode so wichtig sind, ganz aufser acht gelassen werden. Wir werden ein Beispiel geben, indem wir uns die Frage stellen: lassen sich solche Bedingungen angeben, bei welchen die hydrodynamischen Energiekräfte die umgekehrte Richtung erhalten, so dafs die Analogie zu den elektrischen und magnetischen Erscheinungen eine direkte wird?

Als einfachsten Fall können wir zuerst zwei pulsierende Kugeln betrachten. Sind sie gleich pulsierend, so beruht die Anziehung darauf, dafs sie bei grofsem Volumen gegeneinander, und bei kleinem

Volumen voneinander beschleunigt werden. Der Überschufs würde also in der umgekehrten Richtung ausfallen, wenn sie beim grofsen Volumen voneinander, und beim kleinen gegeneinander beschleunigt würden. Dieses würde nun eintreten müssen, wenn die Kugeln während ihrer Ausdehnung einen nach innen, und während ihrer Zusammenziehung einen nach aufsen gerichteten Radialstrom erzeugten. Der Radialstrom müfste also auf einem Absorptions- und Emissionsvorgange beruhen, so dafs zur Zeit der Ausdehnung eine hinlänglich starke Absorption, und zur Zeit der Zusammenziehung eine hinlänglich starke Emission vorhanden wäre, um den von den Volumänderungen an sich erzeugten Strom umzukehren.

Geht man zu dem Falle der oscillierenden Kugeln über, so wird die entsprechende Bedingung der Umkehrung, dafs auf der vorausgehenden Hälfte der oscillierenden Kugel eine Absorption, und auf der nachfolgenden eine Emission hinlänglicher Intensität stattfinden müfste.

Ein Beweis, dafs wirklich in dieser Weise eine Umkehrung der Kräfte zu stande kommt, ist damit nicht gegeben. Ein Gedanke, welchen man mit den feineren Hilfsmitteln der mathematischen Analyse verfolgen und vielleicht auch experimentell verificieren kann, ist aber gefunden. Dr. Arthur Korn hat zuerst diesen Gedanken gefafst und mathematisch verfolgt, wodurch er zu seiner Theorie der unechten Kontinua gekommen ist. Wir verweisen hier ein für allemal auf seine Arbeiten über diese Frage, die wir sonst nicht in die Untersuchung aufnehmen werden.[1]

---

[1] Arthur Korn, Eine Theorie der Gravitation und der elektrischen Erscheinungen, Berlin 1892. Zweite Ausgabe: 1896—98.

# Zweiter Teil.

## Versuche über hydrodynamische Fernkräfte.

## Erster Abschnitt.

### Versuche mit Kugeln, welche an der Oberfläche von Wasser auf- und niedertauchen.

**19. Fallende Kugeln.** — Schon im Sommer 1875, unmittelbar nachdem er die Fernwirkungen zwischen pulsierenden und oscillierenden Kugeln analytisch gefunden hatte, fing C. A. Bjerknes an, sich mit experimentellen Verifikationen seiner Resultate zu beschäftigen. Ohne Laboratorium und ohne jede Ausbildung als praktischer Physiker konnte er nicht an vollkommenere Versuche denken, sondern griff nach den einfachsten Hilfsmitteln, die ihm zufällig in die Hand fielen. Die hölzernen Kugeln eines Krokettspieles waren es, mit denen der erste Versuch von Bedeutung gelang.

Läfst man eine solche Kugel aus kleiner Höhe in Wasser herunterfallen, so wird sie nach drei bis vier Schlägen auf und nieder zur Ruhe kommen. Sie führt also in der Wasserfläche eine Oscillation um eine Gleichgewichtslage aus. Ihr Gleichgewicht bezieht sich aber nur auf die vertikale Bewegung; sie ist frei, jeder in horizontaler Richtung wirkenden Kraft nachzugeben.

Betrachtet man die Bewegung der ganzen Kugel, so liegt eine Oscillation vor. Was uns hier angeht, ist aber nur derjenige Teil der Kugel, der sich unter Wasser befindet, und dieser Teil hat wechselndes Volumen oder, wie wir auch sagen können, das von

der Kugel verdrängte Wasservolumen ist periodisch veränderlich. Von dieser Überlegung ausgehend betrachtete C. A. Bjerknes die auf- und niedertauchende Kugel als ein wenn auch unvollkommenes Bild einer pulsierenden Kugel.

Läfst man eine Kugel dicht neben einer anderen fallen, die in der Wasserfläche ruht, so bleibt die letztere während der ersten paar Schläge ruhig liegen, von einer sehr kleinen Zuckung abgesehen. Diese Zuckung ist offenbar eine Wirkung der Kraft, die wir die Induktionskraft genannt haben. Die Kugel macht die Bewegung der Wassermassen mit, welche von der herunterfallenden Kugel verdrängt werden. Nachdem aber die gefallene Kugel etwa zwei Schläge auf und nieder gemacht hat, fängt die andere an sich zu entfernen unter der Wirkung der Wellenschläge. Mit Wellen werden wir also im folgenden als Ursachen der Störung zu rechnen haben.

Man nehme nun beide Kugeln in die Hand, halte sie in einer Centraldistanz zwischen 1,5 und 2 Kugeldiametern, und in einer ähnlichen Höhe über dem Wasserspiegel, und lasse sie gleichzeitig fallen. Sie werden sich dann rasch einander nähern, um nach ein paar Schlägen auf und nieder zusammenzustofsen.

Nach einiger Übung gelingt auch der folgende Versuch: Man beobachtet genau den Rhythmus der auf- und niedertauchenden Kugel, und läfst dann die Kugeln nicht gleichzeitig, sondern nacheinander fallen, so dafs die zuletzt gefallene die Wasserfläche zur selben Zeit von oben durchbricht, wenn die zuerst gefallene sie von unten durchbricht. Ist dann der Centralabstand in der Anfangslage wenig mehr als ein Kugeldurchmesser, so werden die Kugeln unter entgegengesetzten Schlägen auf und nieder bis zu einem Abstande von mehreren Kugeldiametern von einander getrieben.

Bei dem ersten Versuche nehmen die ins Wasser tauchenden Teile der Kugeln gleichzeitig zu und gleichzeitig ab, so dafs wir es mit gleichen Pulsationen zu thun haben; bei dem zweiten nimmt das eine Volumen zu, während das andere abnimmt, und umgekehrt, die Pulsationen sind entgegengesetzt. Der Versuch bildet also eine erste Verifikation des Satzes, dafs gleich pulsierende Kugeln einander anziehen, und entgegengesetzt pulsierende einander abstofsen. Als Verifikation besonders des Vorzeichens der Kraft war der Versuch ein sehr willkommener zu einer Zeit, wo sich der Gedanke an die Möglichkeit eines Rechenfehlers in den Ableitungen immer noch aufdrängen mufste. Der Versuch ist schon in der Abhandlung erwähnt, in der C. A. Bjerknes zum ersten Male seine analytischen

Resultate über die Anziehung und Abstofsung pulsierender Kugeln mitteilte.[1]

**20. Der Vergleich der auf- und niedertauchenden Kugel mit einer pulsierenden.** — Ein Punkt, welcher eine genauere Diskussion verdient, ist die Auffassung des Experimentes als ein Versuch mit pulsierenden, nicht mit oscillierenden Kugeln.

Dafs die in der Theorie vorausgesetzten Bedingungen nicht erfüllt sind, mufs natürlich zugegeben werden. Die Theorie behandelt Erscheinungen, welche sich im Innern einer unbegrenzten Flüssigkeit abspielen, während hier die Kugeln in der Oberfläche des Wassers oscillieren. Aber eben auf dieser Abweichung von den Voraussetzungen der Theorie beruht auch unser Recht, den Versuch als Verifikation des Satzes von pulsierenden, nicht von oscillierenden Kugeln anzusehen, und zwar kann man das in mehrfacher Weise zeigen.

In den theoretischen Entwickelungen spielt der Vergleich einer oscillierenden Kugel mit zwei zusammengekoppelten, entgegengesetzt pulsierenden Kugeln eine wichtige Rolle. Die oscillierende Kugel und das pulsierende Kugelpaar sind einander gleichwertig, sowohl in Bezug auf die Bewegung, welche sie in der Flüssigkeit erzeugen, wie in Bezug auf die Kräfte, welche sie von seiten der Flüssigkeit erleiden. Solange nun nur die Hälfte oder weniger der fallenden Kugel unter die Wasserfläche gedrungen ist, wird sie nur mit einer volumändernden Kugel zu vergleichen sein. Denn erst nachdem die Äquatorebene durch die Wasserfläche passiert ist, fängt das Saugen hinter der Kugel an, welches man bildlich auf die Kontraktion der zweiten Kugel des Kugelpaares zurückzuführen hat. Und erst nach dem vollständigen Untertauchen hat sich dieses Saugen zu seiner vollen Intensität entwickelt, so dafs die Äquivalenz mit einem vollständigen Kugelpaare besteht. Diese Überlegung zeigt also, dafs man die in der Wasserfläche auf- und niedertauchende Kugel in erster Linie nur mit einer pulsierenden Kugel und nicht mit zwei gleich stark und entgegengesetzt pulsierenden Kugeln zu vergleichen hat. Nur während der kurzen Zeit des vollständigen Untertauchens hat

[1] C. A. Bjerknes, Forelöbige Meddelelser om de Kræfter, der opstaa, naar kugleformige Legemer, idet de udföre Dilatations- og Kontraktionssvingninger, bewæge sig i et inkompressibelt Fluidum, Videnskabsselskabets Forhandlinger, Christiania 1875, S. 386. Auch wiedergegeben im Repertorium der reinen und angewandten Mathematik, Bd. I, S. 264, 1877.

man die Äquivalenz mit dem vollständigen Kugelpaare, und folglich eine reine Oscillationswirkung. Vermeidet man deshalb das vollständige Untertauchen, so hat man es, praktisch gesprochen, nur mit einer kräftigen Pulsationswirkung, und zu den Zeiten des tiefsten Niedertauchens mit einer noch unvollständig entwickelten Oscillationswirkung zu thun.

Andererseits können wir auf die elementaren Entwickelungen zurückgreifen, welche wir in (5) gegeben haben, um die Kraft abzuleiten, welche ein pulsierender Körper erleidet. Das Zustandekommen der progressiv bewegenden Kraft beruhte darauf, daſs sich der Druck der Flüssigkeit während der einen halben Periode der Schwingung gegen einen gröſseren, während der anderen halben Periode gegen einen kleineren Körper geltend machen konnte. Und diese Bedingungen sind bei der auf- und niedertauchenden Kugel erfüllt, da der Flüssigkeitsdruck bei dem tiefen Untertauchen gegen einen gröſseren, bei kleinem gegen einen kleineren Teil der Kugel geltend macht. Die Bedingungen für das Zustandekommen einer progressiv bewegenden Kraft von derselben Natur, wie diejenige, welche einen wirklich pulsierenden Körper angreift, liegen also vor, und der Vergleich der auf- und niedertauchenden Kugel mit einer pulsierenden ist durchaus berechtigt.

**21. Vollkommenere Ausführung der Versuche.** — Die ersten Versuche wurden, wie wir beschrieben haben, in der Weise ausgeführt, daſs die Kugeln einfach aus den Händen losgelassen wurden. Es läſst sich denken, daſs unter solchen Umständen unfreiwillige Bewegungen mehr oder weniger dazu beitragen können, daſs man das erwünschte Resultat erhält. Dieser Einwand fällt fort, wenn man die zwei Kugeln an den Enden eines und desselben Fadens befestigt, und das Loslassen dadurch bewerkstelligt, daſs man den Faden in der Mitte durchbrennt. Nach diesem Prinzipe wurden die Versuche von Bjerknes und Schiötz im Jahre 1876—77 im physikalischen Institut zu Christiania wiederholt. Die Resultate waren immer dieselben, wie bei den früheren einfachen Versuchen. Genauere Angaben hat Schiötz publiciert.[1] Schlieſslich hat der Verfasser ähnliche Versuche an der Universität Stockholm wiederholt, besonders um nachzusehen, inwieweit die beobachteten Fernkräfte

[1] O. E. Schiötz, Versuche über die scheinbare Anziehung und Abstoſsung zwischen Körpern, welche sich in Wasser bewegen. Göttinger Nachrichten 1877, S. 291.

von der Gröfsenordnung waren, die man nach den Formeln zu erwarten hatte.

Bei diesen Versuchen wurden nicht mehr Holzkugeln, sondern hohle Metallkugeln benutzt, denen man durch innere Belastung das erwünschte Gewicht geben konnte. Jede war aus zwei aus dünnem Messingblech gedrückten Halbkugeln zusammengesetzt (Fig. 8). Mit Hilfe einer langen Schraube $S$ und zwei Schraubenmuttern $M_1$, $M_2$ wurden diese wasserdicht zusammengeschraubt, wobei ein Gummiring $G$ als Packung diente. Jede Schraubenmutter $M$ hatte ein Nadelöhr zur Befestigung des Aufhängefadens. Scheibenförmige Bleigewichte $B$ konnten auf die Schraube $S$ gesteckt und mit Hilfe einer der kleinen Schraubenmuttern $m_1, m_2$ festgeklemmt werden. Der Durchmesser jeder Kugel war 6,8 cm, und das Volumen also 164,5 cm³. Das Gewicht konnte von 41 zu 164,5 g verändert werden, was mittlere spezifische Gewichte zwischen den Grenzen 0,25 und 1 gab.

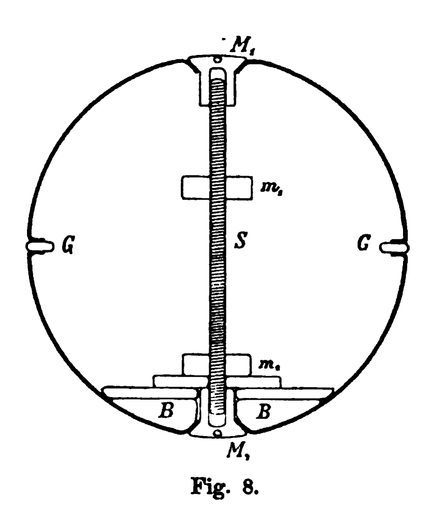


Fig. 8.

Für den Fall, dafs beide Kugeln gleichzeitig von oben fallen sollten, war die durch Figur 9 angegebene Versuchsanordnung gewählt. Die Enden eines und desselben Fadens wurden in den zwei oberen Nadelöhren der Kugeln befestigt und der Faden über drei cylindrische Glasstäbe $S$, $S'$ und $S''$ gelegt. Wenn die Bucht des Fadens über das Ende des letzteren Stabes hinausgeschoben wurde, hörte die Spannung, und damit auch jede merkliche Reibung des Fadens gegen die Glasstäbe auf, und die Kugeln fielen, als wären sie frei. Der Faden biegt sich, und hindert nicht merklich die Vertikaloscillationen. Zum Auffangen des losgeschlagenen Fadens ist die Aufstellung noch eines vierten Stabes $S'''$ zweckmäfsig.

Wenn die eine Kugel von oben herunterfallen, und die andere von unten aufsteigen sollte, wurde der zweite Glasstab $S'$ unter dem Wasser angebracht, und das betreffende Fadenende in dem unteren Nadelöhre der Kugel befestigt (Figur 10). Die statische Reibung genügte, um jedes Gleiten des Fadens zu verhindern. Bei dem Los-

schieben trat aber wieder die Bewegung ein, ohne daſs der Faden die Schwingungen der Kugeln merkbar hinderte.

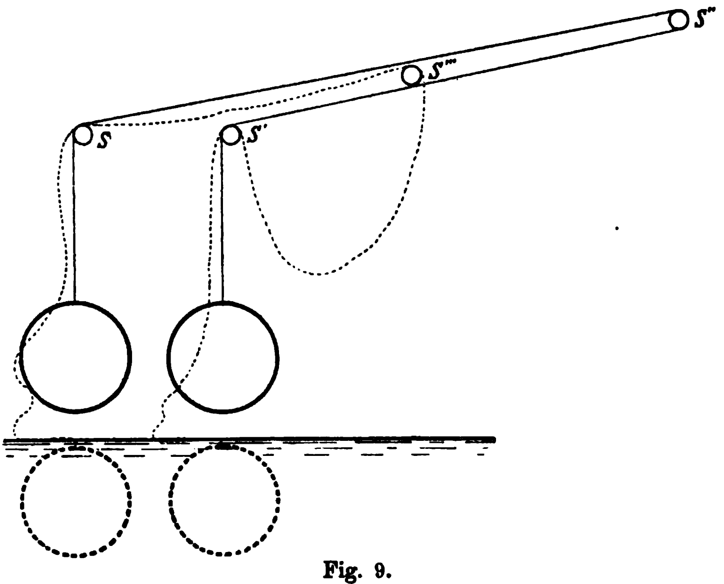



Fig. 9.

Sämtliche folgende Versuche wurden in einem viereckigen Aquarium mit Spiegelglasscheiben (vergl. Figur 30 unten) ausgeführt.

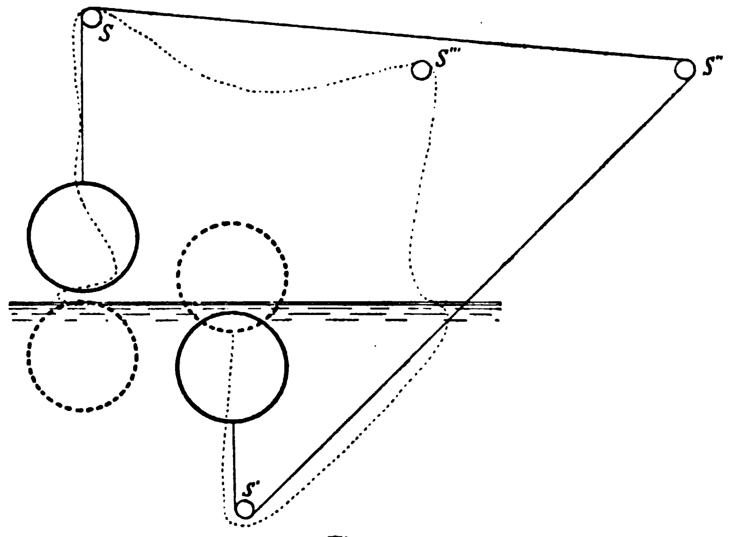



Fig. 10.

Dasselbe hatte 50 cm Länge und Breite, und 30 cm Höhe, inwendig gemessen.

**22. Versuche mit Kugeln von dem spezifischen Gewichte 0,5.** — Von dem ungefähren Verlaufe der Anziehungserscheinung giebt die folgende Tabelle eine Vorstellung für den Fall, daſs die innere Belastung der Kugeln so gewählt ist, daſs sie in der Ruhelage zur Hälfte ins Wasser hineintauchen. In der ersten Kolumne stehen die Fallhöhen, von dieser Ruhelage aus gemessen, und in der ersten Horizontallinie die ursprünglichen Centralabstände, alles in Diametern ($D$) der Kugel als Einheit. Die übrigen Zahlen geben die Anzahl der Schläge an, welche zwischen dem Falle und dem Zusammenstoſs der Kugeln gezählt wurden. Zahlen kleiner als 0,5 geben dabei an, daſs der Zusammenstoſs während des ersten Heruntersinkens erfolgte, Zahlen zwischen 0,5 und 1, daſs der Zusammenstoſs während des ersten Aufsteigens eintrat, und so weiter.

| Fallhöhe | Centralabstand der Kugeln | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1,1 | 1,2 | 1,3 | 1,4 | 1,5 | 1,6 | 1,7 | 1,8 | 1,9 | 2,0 | 2,5 | 3 $D$ |
| 0,25 $D$ | 2,5 | 4 | * | | | | | | | | | |
| 0,5 | 0,7 | 1 | 2,5 | ** | * | * | | | | | | |
| 0,75 | 0,6 | 0,8 | 1 | 2 | 2,5 | 3,5 | ** | ** | ** | ** | * | |
| 1,0 | 0,3* | 0,7 | 0,9 | 1 | 1,5 | 2,5 | 3,5 | ** | ** | ** | ** | * |
| 2,0 | 0,2* | 0,4* | 0,6 | 0,8 | 1 | 1,2 | 1,5 | 2,5 | 3,5 | 3,5 | ** | * |

Da die Schwingungen ungefähr tautochron verlaufen, kann man sagen, daſs die Zahlen die Zeiten zwischen dem Falle und dem Zusammenstoſse der Kugeln geben, in der Schwingungsdauer der Kugeln als Einheit ausgedrückt. Diese Schwingungsdauer war etwa 0,37 Sekunde. Dabei ist jedoch zu bemerken, daſs bei den gröſseren, mit vollständigem Untertauchen der Kugeln verbundenen Fallhöhen die erste Schwingung eine längere Dauer hat. Als Maſse der Zeit sind deshalb die Zahlen in den untersten Linien etwas zu klein und als Korrektion hätte man zu allen Zahlen der letzten Horizontallinie schätzungsweise 0,3, zu allen der vorletzten 0,2, und zu allen der drittletzten 0,1 hinzuzufügen. Die Zahlen, wo diese Korrektion 50 % oder mehr ausmachen würde, sind durch einen Stern hervorgehoben.

Wo keine Zahlen mehr eingefügt sind, fanden Zusammenstöſse nicht mehr statt. Das Zeichen ** giebt an, daſs eine Annäherung der Kugeln während der ersten paar Schläge deutlich wahrnehmbar war, ehe sie von den Wellen voneinander geführt wurden, und das Zeichen * bedeutet, daſs eine solche erste Annäherung immer noch durch schärfere Beobachtung wahrgenommen werden konnte, ehe sich der Einfluſs der Wellenschläge geltend machte.

Aus den Zahlen sieht man, daſs die Kraft mit zunehmendem Abstande rasch abnimmt, und zwar zeigt sich dieses bei allen Fallhöhen. Mit zunehmender Fallhöhe nimmt der Abstand, bei dem Anziehung bis zur Berührung eintritt, wie zu erwarten ist, rasch zu, da man bei gröſseren Fallhöhen mit gröſseren Pulsationsintensitäten und auſserdem mit einer zunehmenden Oscillationswirkung zu rechnen hat. Wenn die Fallhöhe 0,75 $D$ überschritten hat, von wo an ein vollständiges Untertauchen der Kugel während des ersten Schlages eintritt, ist die Zunahme der Kraft weniger ausgesprochen, aber doch immer deutlich. Das rührt dann nicht mehr von der Pulsationswirkung her, sondern von der Oscillationswirkung, und von dem Umstande, daſs sich bei dem tiefen Untertauchen die Schläge der ersten und kräftigsten Wellen weniger geltend machen. — Es hat auch Interesse zu erwähnen, daſs bei den Versuchen mit den zwei gröſsten Fallhöhen bei kürzestem Abstande zwei Zusammenstöſse zu verzeichnen waren. Der erste, welcher in der Tabelle angegeben ist, trat während der ersten Bewegung abwärts ein. Als Folge des ersten Zusammenstoſses entfernten sich die Kugeln ein wenig voneinander, um dann wieder einmal infolge der Anziehung zusammenzustoſsen.

Für das Gelingen der Abstoſsungsversuche ist es wichtig, daſs die Kugeln auch wirklich in entgegengesetzte Schwingungen kommen. Bei kleinen Fall- und Steighöhen erreicht man dieses leicht. Wählt man beispielsweise die Steighöhe und Fallhöhe gleich einem Viertel des Durchmessers, so treten schöne entgegengesetzte Schwingungen ein, und die Kugeln entfernen sich voneinander von einem anfänglichen Centralabstande von 1,1 $D$ zu einem Abstande von 1,5 $D$. Bei einer Steig- und Fallhöhe von $\frac{1}{2}$ $D$ werden die Kugeln von demselben Anfangsabstande bis zu einem Abstande von etwa 2 $D$ abgestoſsen. Will man, um kräftigere Wirkungen zu erhalten, noch gröſsere Steig- und Fallhöhen benutzen, so muſs die Fallhöhe gröſser als die Steighöhe gewählt werden. Denn da der Fall durch die Luft schneller ist als das Steigen durch das Wasser, würde sonst die fallende Kugel früher die Gleichgewichtslage passieren, als die steigende. Mit gleichen Steig- und Fallhöhen erhält man somit eine Verschiebung der Phase, und damit kann Anziehung anstatt Abstoſsung erfolgen. Sehr schöne und kräftige Abstoſsung erhält man dagegen beispielsweise, wenn die Steighöhe $\frac{3}{4}$ $D$, und die Fallhöhe $D$ ist. Die Kugeln werden von dem Abstande 1,2 $D$ bis zu einem Abstande von mehreren Kugeldiametern voneinander geführt. Durch genauere Beobachtungen ist die Abstoſsung noch bemerk-

bar, selbst wenn der ursprüngliche Centralabstand 2 $D$ oder mehr beträgt.

**23. Vergleich mit der Theorie in quantitativer Beziehung.** — Zu genauerem Vergleiche mit der Theorie werden wir versuchen, die Anzahl der Schläge von dem Falle bis zu dem Zusammenstoſse der Kugeln nach den Formeln zu schätzen. Die anziehende Kraft $F$ zwischen pulsierenden Kugeln ist durch die Formel **17** (a) gegeben. Da beide Kugeln identisch gleiche Bewegungen haben, können wir in dieser Formel sofort $\hat{E}' = \hat{E}$ setzen. Was wir brauchen ist aber nicht die Kraft $F$ selbst, sondern die Beschleunigung $G$, welche sie der Kugel erteilt. Diese ergiebt sich, wenn wir die Kraft $F$ durch die effektive Masse $M$ der Kugel dividieren. Sie wird also

$$G = \frac{q}{M} \frac{\hat{E}^2}{4\pi r^2}. \tag{a}$$

Wie in den Versuchen können wir als Längeneinheit den Durchmesser $D$, und als Zeiteinheit die Schwingungsdauer $T$ einer Kugel einführen. Das Volumen der Kugel ist in diesen Einheiten $\frac{1}{6}\pi$. Die gröſste Pulsationsamplitude, welche bei dem Versuch in Frage kommen kann, ist gleich dem halben Volumen, oder $\frac{1}{12}\pi$. Multipliciert man diesen Wert der Amplitude mit der Schwingungszahl, welche gleich Eins ist, und mit dem numerischen Faktor $\sqrt{2}\,\pi$, um nach **13** (A) die Pulsationsintensität zu bilden, so erhält man

$$\hat{E} = \frac{\sqrt{2}}{12}\pi^2,$$

und folglich

$$\frac{\hat{E}^2}{4\pi r^2} = \frac{\pi^3}{8(6r)^2}. \tag{b}$$

Die Masse einer Kugel, welche zur Hälfte in eine schwere Flüssigkeit taucht, ist gleich der Masse des verdrängten Flüssigkeitsvolumens. Mit $D$ als Längeneinheit wird also diese Masse gleich $\frac{1}{12}\pi q$. Zur Berechnung der effektiven Masse haben wir noch die scheinbare Vergröſserung der Trägheit zu berücksichtigen, welche darauf beruht, daſs sich die Kugel in der Flüssigkeit bewegt. Bewegte sie sich ganz im Innern der Flüssigkeit, so wäre der scheinbare Zuschlag zu der Masse gleich der Hälfte des verdrängten Flüssigkeitsvolumens. Nehmen wir dasselbe Gesetz für eine Kugel gültig an, welche zur Hälfte in die Flüssigkeit hineintaucht, und

längs der Oberfläche sich bewegt, so haben wir $\frac{1}{24}\pi q$ hinzuzufügen, und es ergiebt sich $M = \frac{1}{8}\pi q$, und folglich

(c) $$\frac{q}{M} = \frac{8}{\pi}.$$

Durch Einsetzen finden wir als Wert der gesuchten Beschleunigung:

(d) $$G = \left(\frac{\pi}{6r}\right)^2.$$

Um nun die Zeiten von dem Falle bis zu dem Zusammenstoſse der Kugeln der Gröſsenordnung nach zu schätzen, können wir einfach die bekannte Formel für die Fallzeiten unter dem Einfluſs der Schwere benutzen, nämlich

(e) $$t = \sqrt{\frac{2l}{G}},$$

wo $l$ den zurückgelegten Weg, und $G$ die Beschleunigung bedeutet. Diese Formel bezieht sich allerdings auf den Fall einer konstanten Beschleunigung, während in unserem Versuche die Beschleunigung eine veränderliche ist. Bei den immer kleinen durchlaufenen Weglängen $l$ wird aber die Veränderlichkeit der Beschleunigung nicht für die Gröſsenordnung der berechneten Zeiten von Belang sein. Dazu kommt, daſs die zwei Ursachen, welche die Veränderungen in den Werten der Beschleunigung veranlassen, in entgegengesetzten Richtungen wirken. Wegen der Zunahme der Kraft mit abnehmendem Abstande soll nämlich die Beschleunigung zunehmen, wegen der Dämpfung der Schwingungen dagegen abnehmen. Thatsächlich kompensieren sich die zwei Wirkungen in der Weise, daſs man bei den kleineren Anfangsabständen es mit einer zunehmenden, bei den gröſseren mit einer abnehmenden Beschleunigung zu thun hat. Das letztere ist ohne weiteres klar in den Fällen, wo die Schwingungen aufhören, ehe die Kugeln zur Berührung kommen.

Da sich die Kugeln mit gleichen Geschwindigkeiten gegeneinander bewegen, wird die Weglänge, welche eine Kugel bis zum Zusammenstoſse mit der anderen zurücklegt,

(f) $$l = \frac{r-1}{2}$$

betragen. Setzt man dieses und den Wert von $G$ in (e) ein, so ergiebt sich

$$t = \frac{6r}{\pi} \sqrt{r-1}\,. \tag{g}$$

Für die bei den Versuchen vorgekommenen Werte von $r$ giebt dieses:

| $r$ = | 1 | 1,1 | 1,2 | 1,3 | 1,4 | 1,5 | 1,6 | 1,7 | 1,8 | 1,9 | 2 | 2,5 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $t$ = | 0 | 0,66 | 1,0 | 1,4 | 1,7 | 2,0 | 2,4 | 2,7 | 3,1 | 3,4 | 3,8 | 5,9 | 8 |

Diese Zahlen sind durchaus von derselben Gröſsenordnung, wie die experimentell gefundenen, welche die Tabelle (22) enthält. Die Übereinstimmung ist in der That viel besser als zu erwarten wäre. Denn Gegenstand des Vergleiches sind nur diejenigen Zahlen der Tabelle 1, welche gröſseren Fallhöhen als 0,5 entsprechen. Denn nur bei diesen gröſseren Fallhöhen erhält man die in der Rechnung vorausgesetzte anfängliche Pulsationsintensität. Andererseits kommen die in den letzten zwei Zeilen enthaltenen Zahlen erst in Frage, nachdem man sie in angegebener Weise etwas vergröſsert hat. Es zeigt sich deshalb, daſs sogar viele der berechneten und experimentell gefundenen Zahlen genau übereinstimmen, nur natürlich nicht bei den gröſsten Abständen, wo die abstoſsende Wirkung der Wellen Überhand nimmt. Wenn man bedenkt, wie groſse Unterschiede thatsächlich vorhanden sind zwischen den Voraussetzungen der Theorie und den bei dem Experimente vorliegenden Verhältnissen, so läſst sich die auffällige Übereinstimmung nur dadurch erklären, daſs mehrere in der Rechnung nicht berücksichtigte Umstände Wirkungen haben müssen, die sich ungefähr kompensieren, so beispielsweise die nicht berücksichtigte Abstoſsung wegen der Wellen, und die nicht in Rechnung genommene Anziehung wegen der Oscillationswirkung.

Die obigen quantitativen Betrachtungen haben keine direkten Erläuterungen über die absoluten Werte der bei den Versuchen thätigen Kräfte gegeben. Indirekt sind aber doch ihre Gröſsen durch das Vorhergehende mit der Theorie in Übereinstimmung gefunden. Ein Fehler wird eventuell nur dadurch haben hineinkommen können, daſs wir die träge Reaktion der zur Hälfte ins Wasser tauchenden Kugel unrichtig beurteilt haben. Dabei wird es sich aber nur um Korrektionsglieder handeln können. Man kann aber auch nach der Formel 17 (a) die Kraft direkt in C.G.S.-Einheiten ausrechnen. Man findet dann, daſs sie etwa 1650 Dynen, also ungefähr 1,7 g beträgt, wenn die Kugeln miteinander in Berührung sind. Bei dem Centralabstande 2 $D$ beträgt sie dann 0,42 g. Daſs nun die Kraft, welche die Anziehung der auf- und niedertauchenden Kugeln gegeneinander veranlaſst, wirklich diese Gröſsenordnung

hat, verificiert man leicht, indem man die Bewegung beobachtet, welche die Kugel unter dem Einflusse einer Kraft dieser Gröfse annimmt. Man sieht dann gleich, dafs die Bewegungen von derselben Intensität sind, wie diejenigen, welche bei dem Versuche mit fallenden Kugeln auftreten.

Der einfache Versuch mit den zwei Kugeln, welche in Wasser herunterfallen, geben deshalb nicht nur qualitativ, sondern auch quantitativ eine erste Verifikation des theoretischen Gesetzes über pulsierende Körper, obgleich diese Verifikation aus Gründen, welche völlig klar sind, immer eine unvollkommene bleibt.

**24. Allgemeines über veränderte Versuchsbedingungen.** — Die beschriebenen Versuche lassen sich in mehrfacher Weise abändern, und die Resultate gewisser solcher Abänderungen kann man leicht mit Hilfe des Prinzipes von den geometrisch ähnlichen Flüssigkeitsbewegungen voraussehen. Wenn man von dem Einflusse der Reibung und der Kapillaritätserscheinungen absieht, läfst sich dieses Prinzip folgendermafsen aussprechen: aus einer bekannten Lösung der hydrodynamischen Bewegungsgleichungen kann man in der Weise eine neue ableiten, dafs man alle Längen in einem gewissen Verhältnisse, und alle Zeiten wie die Quadratwurzel desselben Verhältnisses verändert.

Aus diesem Prinzipe folgert man sofort, dafs die Schwingungsdauern zweier Kugeln gleichen spezifischen Gewichtes sich wie die Quadratwurzeln ihrer Radien verhalten werden. Das von der Wellenbildung abhängige Dämpfungsverhältnis, welches eine dimensionslose Zahl ist, hat dagegen für beide denselben Wert, alles unter der Voraussetzung, dafs man nicht so kleine Kugeln anwendet, dafs die Kapillarerscheinungen oder die Reibung überwiegenden Einflufs erhalten.

Macht man nun die oben beschriebenen Versuche mit Kugeln, welche $n$ mal gröfser sind, und welche in $n$ fachem Abstande voneinander, und aus $n$ facher Höhe fallen, so werden sich nicht nur die Schwingungsdauern der Kugeln, sondern auch der Zeitverlauf von dem Falle bis zu dem Zusammenstofse der Kugeln in dem Verhältnisse $\sqrt{n}$ zunehmen. Wendet man deshalb die Schwingungsdauer der Kugel als Zeiteinheit an, so findet man, dafs die Kugeln bei beiden Versuchen nach gleich viel Schlägen auf und nieder zusammenstofsen werden. Für den Versuch ist deshalb nichts zu gewinnen durch Übergang zu anderen Dimensionen. Selbst die kritischen Abstände, in welchen die abstofsende Wirkung der Wellen

die Überhand über die hydrodynamische Anziehung nimmt, werden in demselben Verhältnisse wie die übrigen linearen Dimensionen sich verändern.

Wenn man andererseits Flüssigkeiten anderer spezifischer Gewichte anwendet, so ist auch dadurch nichts zu erreichen. Denn es nehmen dann alle trägen Reaktionen in genau demselben Verhältnisse wie die bewegenden Kräfte zu, vorausgesetzt, dafs man das spezifische Gewicht der Kugeln in demselben Verhältnisse wie das der Flüssigkeit verändert. Die Tabelle (22) giebt deshalb den Verlauf der Erscheinung für Kugeln aller Dimensionen, welche in Flüssigkeiten von beliebigem spezifischen Gewichte herunterfallen, vorausgesetzt nur, dafs das spezifische Gewicht der Kugeln halb so grofs wie die der Flüssigkeit ist.

Messende Versuche für die Verifikation dieses Resultates sind nicht vorgenommen worden. Auch würde es sich dabei, wie man sieht, mehr um die Verifikation des allgemeinen Prinzipes über geometrisch ähnliche Flüssigkeitsbewegungen, als um die Untersuchung der Spezialeigenschaften der hydrodynamischen Fernkräfte handeln. Dafs es qualitativ stimmt, sieht man jedoch leicht, wenn man Holzkugeln verschiedener Gröfse in Wasser, oder Eisenkugeln in Quecksilber herunterfallen läfst.

**25. Fallende Kugeln verschiedener spezifischer Gewichte.** — Wenn die spezifischen Gewichte der Kugeln und der Flüssigkeit in einem anderen Verhältnis als $\frac{1}{2}$ zu einander stehen, so ist die Tabelle (22) nicht mehr für den Verlauf der Erscheinung mafsgebend. Wie sich die Resultate ändern, brauchen wir aber wieder nur durch Versuche mit Kugeln e i n e r Gröfse in e i n e r Flüssigkeit, etwa Wasser, zu untersuchen.

Wenn wir die innere Belastung unserer hohlen Messingkugeln verkleinern, so erhalten sie kürzere Schwingungsdauer. Damit folgen einerseits stärkere hydrodynamische Fernkräfte, aber andererseits auch stärkere Wellenbildung. Alles in allem werden die Versuchsbedingungen dadurch weniger vorteilhaft. Dennoch gelingt der Anziehungsversuch bis zu den gröfsten in Tabelle (22) verzeichneten Abständen, unter der Bedingung, dafs man die Fallhöhen hinlänglich vergröfsert. Dieses hat sich gezeigt selbst bei dem kleinsten erreichbaren spezifischen Gewichte der Kugeln von 0,25.

Bei Vergröfserung des spezifischen Gewichtes erhält man langsamere Schläge und deshalb kleinere Kräfte. Gleichzeitig erhält man aber schon bei kleinen Fallhöhen hinlänglich tiefes Eintauchen,

und die Wellen machen sich weniger geltend. Die vorteilhaftesten spezifischen Gewichte der Kugeln scheinen diejenigen zwischen 0,5 und 0,7 zu sein. Doch ist es immer noch schwer, Anziehung bis zur Berührung zu erreichen von gröfseren Centralabständen aus, als zwei Kugeldiametern. Auch wird mit zunehmendem spezifischen Gewichte der Versuch, als Pulsationsversuch betrachtet, weniger rein. Denn mit dem immer tieferen Eintauchen der Kugeln folgt eine immer mehr sich geltend machende Oscillationswirkung.

Benutzt man eine leichte und eine schwere Kugel gleicher Gröfse, so wird man nicht mehr synchrone Schwingungen erhalten. Dennoch kann man aber sehr hübsche Versuche anstellen, indem man nur die Wirkung des ersten Pulsationsschlages ausnutzt, wenn die Kugeln zum ersten Male, und dann gleichzeitig, die Wasserfläche durchbrechen. Folgendes wird man sehen, wenn man eine Kugel von dem spezifischen Gewichte 0,25 bis 0,35, und eine Kugel von dem spezifischen Gewichte 0,65 bis 0,75 dicht nebeneinander fallen läfst. Die schwerere Kugel taucht tiefer herunter als die leichtere. Infolge des Attraktionsimpulses sucht nun die leichtere Kugel sich in dem freien Raume über die schwerere hin zu bewegen, während die schwerere ihrerseits einen Bogen unter der leichteren beschreibt (Figur 11). Die Kugeln suchen mit anderen Worten den Platz zu wechseln. Inwieweit nun dieses gelingt, hängt von den Fallhöhen ab. Bei Fallhöhen kleiner als 0,5 $D$ wird die schwere Kugel hinlänglich früh aufsteigen, um die leichte durch einen kräftigen Stofs in ihre Ausgangslage zurückzuwerfen. Bei einer Fallhöhe in der Nähe von $D$ wird die leichte Kugel den Stofs central von unten erhalten, mit dem Erfolge, dafs sie bald in der einen Richtung und bald in der anderen geschleudert wird. Bei Fallhöhen zwischen 1,5 und 2 $D$ endlich tritt der Zusammenstofs meistens überhaupt nicht mehr ein. Die leichte bewegt sich über die schwere hin, und die schwere beschreibt einen Bogen unter der leichten, so dafs sie ihren Platz austauschen, ohne überhaupt miteinander in Berührung zu kommen.

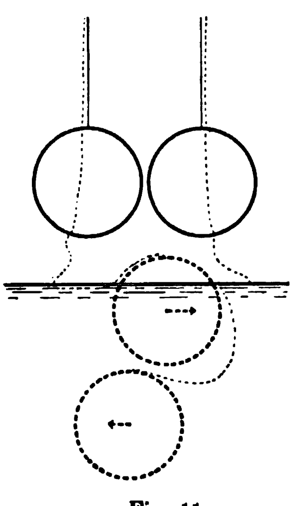


Fig. 11.

**26. Eine Kugel, welche nahe einer vertikalen Wand fällt.** — Die beschriebenen Versuche müssen immer in einem geräumigen Gefäfse gemacht werden, so dafs der Abstand jeder Kugel von der nächsten Wand wenigstens ein paar Kugeldurchmesser beträgt. Denn wenn man sie in der Nähe einer Wand anstellt, so treten Komplikationen ein.

Die Natur dieser Komplikationen entdeckt man bald, wenn man eine einzige Kugel in der Nähe einer vertikalen ebenen Wand fallen läfst. Denn wenn man sich so stellt, dafs man aufser der Kugel selbst auch das Spiegelbild der Kugel an der Wand sieht, so wird die Erscheinung genau so, wie wenn zwei gleiche Kugeln gleichzeitig von gleicher Höhe in Wasser fallen. Bei gewissen Fallhöhen und Abständen sieht man die Kugel und ihr Spiegelbild sich einander nähern, und dann zusammenstofsen, um nach dem Zusammenstofse sich wieder voneinander zu entfernen. In anderen etwas gröfseren Abständen scheinen die zwei Kugeln durch die Wellenschläge voneinander getrieben zu werden. Ist das mittlere spezifische Gewicht der Kugel gleich $\frac{1}{2}$, so verläuft die Erscheinung der Hauptsache nach in Übereinstimmung mit der Tabelle (**22**).

Man erkennt leicht die Ursache. Wenn zwei miteinander identische Kugeln aus gleicher Höhe fallen, so tritt in der Flüssigkeit eine Bewegung ein, welche symmetrisch ist in Bezug auf eine Ebene, die auf der Mitte der Verbindungslinie der Kugeln senkrecht steht. Die Flüssigkeitspartikelchen, welche sich in dieser Ebene befinden, haben wegen der Symmetrie keine Geschwindigkeit senkrecht zu der Ebene. Läfst man diese Ebene erstarren, so wird dadurch die Flüssigkeitsbewegung auf beiden Seiten nicht im geringsten verändert. Wenn man nachher die Flüssigkeit und die Kugel auf der einen Seite der Wand wegnimmt, so hat das keinen Einflufs auf die Bewegung auf der anderen Seite. Dies bezieht sich alles nicht nur auf die Bewegung im Innern der Flüssigkeit, sondern auch auf die Wellen auf der Oberfläche. Die Wellen, welche von der Wand reflektiert werden, verhalten sich genau so, als ob sie von der anderen Kugel ausgesendet würden. Wenn deshalb eine Kugel neben einer ebenen vertikalen Wand fällt, so wird alles so verlaufen, als ob die Spiegelbilder, welche die Kugel und die Flüssigkeit an der Wand geben, eine wirkliche Kugel und wirkliche Flüssigkeit wären, und als ob keine Wand vorhanden wäre.

Aufser dem Interesse an sich hat dieser Versuch, wie angedeutet, auch Bedeutung für die Erklärung der sonst unverständlichen Komplikationen, welche auftreten, wenn man den Versuch mit zwei

fallenden Kugeln zu nahe an einer Wand ausführt. Die Anziehung einer Kugel nach der Wand hin kann beispielsweise ein Entfernen der zwei Kugeln voneinander veranlassen, wenn man sonst eine Anziehung zu erwarten hat. Und umgekehrt kann die Abstofsung einer Kugel von der Wand durch die reflektierten Wellen eine Annäherung der zwei Kugeln gegeneinander zur Folge haben, unter Umständen, welche sonst Abstofsung geben sollten. Noch komplicierter können die Erscheinungen in ganz engen Gefäfsen verlaufen, wo die Wände nahe sind, und wo mehrfache Reflexionen der Wellen zwischen den Wänden in die Erscheinung eingreifen.

## Zweiter Abschnitt.

### Versuche mit Kugeln, welche unter Wasser Pendelschwingungen ausführen.

**27. Pendelschwingungen schwimmender Körper.** — Aufser den vertikalen Schwingungen, welche in reinem Ein- und Auftauchen bestehen, können schwimmende Körper Oscillationen drehender Natur um eine horizontale Achse ausführen. Die Ausnutzung solcher Oscillationen zum Nachweis der Fernwirkungen, welche nach der Theorie zwischen oscillierenden Kugeln zu erwarten waren, wurde vom Verfasser im Winter 1878—79 versucht.

Eine Kugel $K$ aus leichtem Holz (Figur 12) wurde längs eines Diameters durchbohrt, und ein zu beiden Seiten herausragender hölzerner Stab durchgesteckt. An das untere Ende dieses Stabes wurde eine kleinere, aber schwerere Kugel $k$ befestigt, die aus Siegellack oder aus Wachs mit kleinen Bleistückchen hergestellt war. Diese aräometerähnliche Vorrichtung tauchte ungefähr so tief ins Wasser, wie die Figur zeigt, und war im Gleichgewicht, wenn die als Mast herausragende Stange vertikal war. Um eine wohldefinierte schiefe Ausgangslage zu erhalten, wurde der Mast oben schief abgeschnitten, und diese schiefe Fläche mit dem Finger gegen eine vertikale feste Wand gedrückt. Bei schnellem Loslassen traten dann regelmäfsige Schwingungen ein, ohne jede progressive Bewegung von Bedeutung. Die Schwingungen der oberen und der unteren Kugel sind dabei entgegengesetzt und der Mittelpunkt der oberen bewegt sich auf

einem kleineren Kreisbogen, welcher nach oben konvex ist, der Mittelpunkt der unteren auf einem gröfseren Kreisbogen, welcher nach unten konvex ist.

Werden nun zwei solche Vorrichtungen in der angegebenen Weise in schiefer Lage gehalten, und gleichzeitig losgelassen, so treten synchrone Schwingungen ein, und es müssen nach der Theorie hydrodynamische Fernkräfte zwischen den Kugeln auftreten. Dabei haben die Kräfte, welche zwischen den zwei oberen Kugeln wirken,

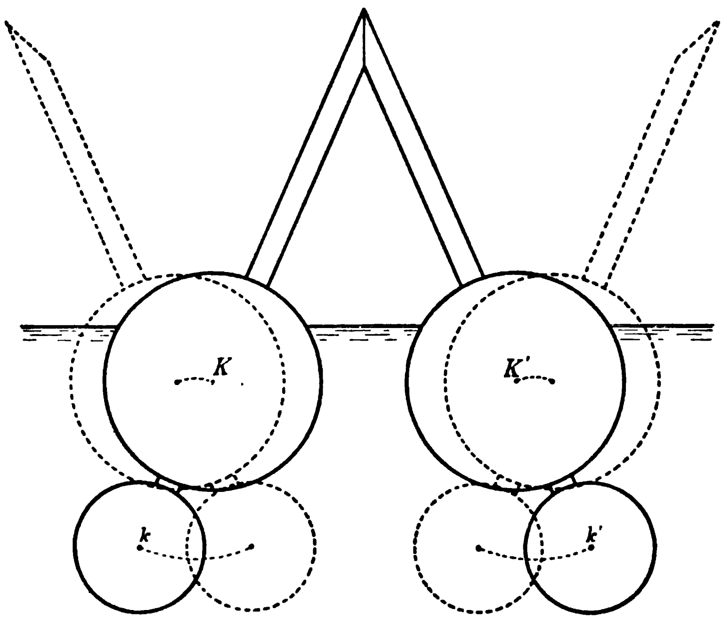



Fig. 12.

dasselbe Vorzeichen wie die Kräfte, welche zwischen den zwei unteren wirken. Eine Komplikation tritt insofern ein, als Kräfte von dem entgegengesetzten Vorzeichen zwischen der einen unteren Kugel und der anderen oberen thätig sind. Diese Kräfte wirken aber in gröfserem Abstand, und vor allem unter unvorteilhafterem Winkel, und kommen deshalb wenig in Frage. Alles wird qualitativ so verlaufen, als hätte man es nur mit den Fernkräften zwischen je zwei in gleichem Niveau befindlichen Kugeln zu thun. Durch passende Anbringung der festen Ebenen, gegen welche die schiefen Ebenen der Masten gedrückt werden, kann man leicht erreichen, dafs die Oscillationsachsen alle die gegenseitigen Lagen einnehmen, welche durch die Figuren 7, a bis f gegeben sind. Der Fall

Figur 7g, der normal-transversalen Oscillationen, kann dagegen nicht verwirklicht werden.

Es gelingt nun in der That, in dieser einfachen Weise sämtliche erwarteten Wechselwirkungen anziehender, abstofsender und drehender Natur nachzuweisen. Die Figur 12 bezieht sich auf den Fall der Anziehung bei longitudinalen Oscillationen. Die schiefen Ebenen der Masten konnten dann in der Ausgangslage einfach gegeneinander, anstatt gegen die festen Wände geprefst werden. Die Kräfte zeigten sich durchweg bedeutend schwächer als bei den fallenden Kugeln, aber gleichzeitig waren die Störungen wegen der Wellen kleiner, und deshalb die Kräfte in Centralabständen bis zu 1,5 Kugeldiametern der oberen grofsen Kugeln deutlich erkennbar.

Dafs man bei den Versuchen nur Fernkräfte sehr mäfsiger Intensität erhält, beruht darauf, dafs die Schwingungsdauern ziemlich grofs sind. Allerdings hat es keine Schwierigkeit, die Schwingungsdauer bedeutend zu verkürzen, indem man die obere Kugel leichter, und die untere entsprechend schwerer macht. Als obere Kugel kann man dann beispielsweise einen hohlen Celluloidball anwenden, dessen mittleres spezifisches Gewicht nicht mehr als etwa 0,05 zu sein braucht. Mit der abnehmenden Schwingungsdauer nimmt aber die Dämpfung der Schwingungen wegen der Bildung von Wellen auf der Oberfläche des Wassers aufserordentlich stark zu, so dafs man zuletzt kaum mehr als eine einzige Schwingung erhält. Der Versuch geht dann sehr schlecht. Dagegen wird wieder alles besser, wenn man durch kleine Gewichte auf den Masten die Schwingungsdauer vergröfsert, so dafs man 8 bis 10 merkbare Schwingungen erhält.

**28. Pendelschwingungen einer Kugel unter Wasser.** — Die Komplikation durch die Wellenbildung in der Oberfläche kann aber vermieden und gleichzeitig das schwingende System vereinfacht werden. Durch Vergröfserung der Bleibelastung *B* kann die Hohlkugel (Figur 8) so schwer gemacht werden, dafs sie sich eben im Innern des Wassers schwebend hält. Dieses gelingt um so leichter, als man die letzte feine Regulierung durch schwaches Zu- oder Aufschrauben der Schraubenmuttern $M_1$ und $M_2$ bewerkstelligen kann. Dadurch wird der Gummiring *G* etwas mehr oder weniger zusammengedrückt, und folglich das Gesamtvolumen etwas vergröfsert oder verkleinert. Die Kugel hat, wenn sie im Innern des Wassers schwebt, eine natürliche Gleichgewichtslage mit dem belasteten Ende nach unten, und kann um diese Gleichgewichtslage

Pendelschwingungen ausführen, welche nur durch die Reibung, und nicht mehr durch die Wellenbildung gedämpft werden.

Die Methode für das Festhalten der Kugel in der gewünschten Ausgangslage ersieht man aus der Figur 13. Die Enden eines und desselben Fadens sind in den Nadelöhren $M_1$ und $M_2$ der Kugel befestigt. Von dem leichten Ende $M_1$ der Kugel geht der Faden vertikal abwärts und passiert durch den kleinen im Schnitt gezeigten Glasring $R_1$, von dem schweren Ende $M_2$ geht er vertikal aufwärts,

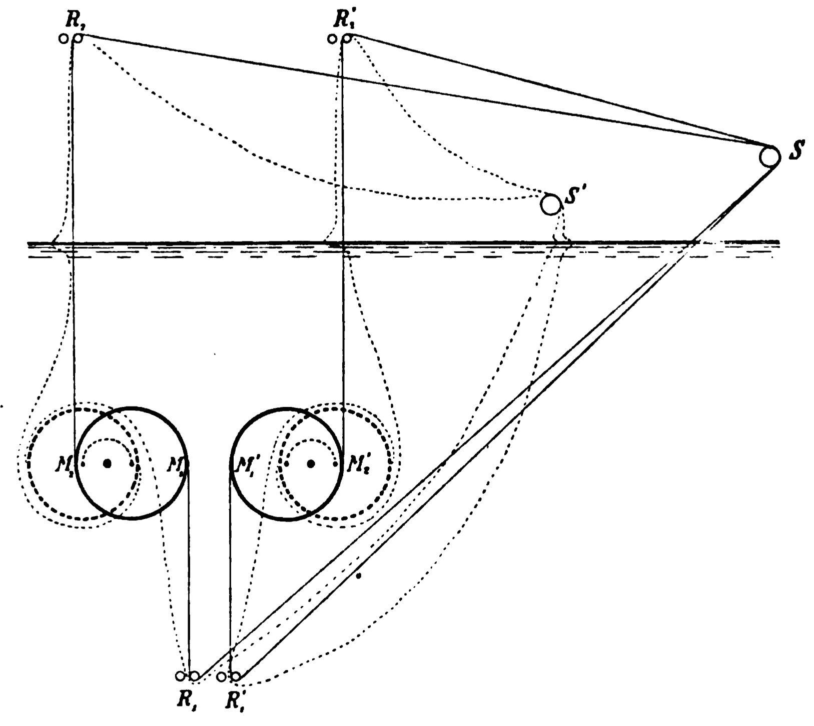



Fig. 13.

und passiert durch den Glasring $R_2$. Von diesen Ringen geht er zu dem Glasstabe $S$, durch dessen Verschiebung man die erwünschte, mehr oder weniger schiefe Ausgangslage erhalten kann. Wird die Bucht des Fadens über das Ende dieses Glasstabes hinausgeschoben, so treten die Schwingungen ein, ohne daſs gleichzeitig merkbare progressive Bewegungen aufkommen. Der Faden wickelt sich während der Schwingungen leicht auf der Kugel auf und ab, ohne die Bewegungen merkbar zu hemmen. Die Vertikalebene $R_1 M_1 M_2 R_2$ wird die Schwingungsebene der Kugel, und diese Ebene ist von der

Ebene $R_1 S R_2$ ganz unabhängig. Wenn man deshalb zwei Kugeln auf einmal schwingen lassen will, so kann man leicht die vertikalen Schwingungsebenen in jede beliebige Lage zu einander bringen, und doch die Buchten beider Fäden über denselben Glasstab $S$ passieren lassen. Hier kann man leicht beide auf einmal über das Ende des Stabes hinausschieben, so dafs die Schwingungen gleichzeitig eintreten. Kleine Unterschiede in den Schwingungsdauern der Kugeln kann man durch Verstellen der kleinen Schraubenmutter $m_1$ (Figur 8) aufheben.

Für das richtige Verständnis der Versuche müssen wir die Bewegung der Kugel etwas genauer analysieren. Sie besteht in Schwingungen drehender Natur. Ein gewisser Punkt der Kugel, welchen wir das effektive Trägheitscentrum nennen können (auf der Figur 13 durch einen schwarzen Punkt markiert), bleibt in Ruhe, und die Kugel dreht sich um eine horizontale Achse, welche durch diesen Punkt geht. Nach den elementaren Prinzipien der Kinematik können wir uns die Umdrehungsachse in den Mittelpunkt der Kugel parallel verschoben denken. Die Bewegung der Kugel besteht dann in einer Rotation um diese neue Achse, und in einer Translation, welche der Translation dieser Achse gleich ist. Die Rotation einer Kugel um einen ihrer Durchmesser hat nun keinen anderen Einflufs, als ein Mitschleppen der unmittelbar anliegenden Wasserschichten durch die Reibung. Hierin hat man die Hauptursache der Dämpfung der Schwingungen, aber nur die Translationsbewegung erzeugt Bewegungen in gröfseren Abständen, welche scheinbare Fernkräfte veranlassen können. Diese Translationsbewegung ist gleich der des Mittelpunktes der Kugel, und dieser Punkt beschreibt einen nach oben konvexen Kreisbogen um das effektive Trägheitscentrum. Dieser Bogen ist in der Figur 13 als ein gestrichelter Halbkreis gezeichnet.

Wenn dieser Bogen hinlänglich klein ist, so kann man die Schwingungen einfach als geradlinig betrachten. Die Diskussion der Versuche wird dann in qualitativer wie in quantitativer Beziehung äufserst einfach, der Vergleich mit dem Schema der Figur 7 und mit den Formeln 17 (f) ergiebt sich ganz von selbst. Um hinlänglänglich grofse Kräfte zu erhalten, wird es aber meistens notwendig sein, Schwingungen in gröfseren Bögen zu benutzen. Dabei ändert sich jedoch für die qualitative Diskussion nichts, solange der Bogen nicht einen Halbkreis überschreitet. Um dies zu beweisen, können wir die bogenförmige Schwingung in eine horizontale und eine vertikale geradlinige Schwingungskomponente auflösen. Die erste

hat die doppelte Schwingungsdauer, und wenn der Bogen gerade ein Halbkreis ist, wird sie gleichzeitig auch die doppelte Amplitude wie die zweite haben. Beide Schwingungskomponenten haben dann gleiche Oscillationsintensitäten. Wenn aber der Bogen infolge der Dämpfung der Schwingungen kleiner wird, so nimmt die Amplitude der vertikalen Schwingungskomponente schneller als die der horizontalen ab; die Intensität der horizontalen Oscillationen wird die überwiegende, und das qualitative Resultat wird nur von ihr abhängen.

Schwingungen in gröfseren Bögen als einem Halbkreis werden im folgenden nur in Ausnahmefällen vorkommen. Von diesen absehend können wir deshalb die Schwingungen einfach nach den Horizontalkomponenten benennen, und bei der qualitativen Diskussion das Schema der Figur 7 einfach nur auf die Horizontalkomponenten anwenden.

Es sei zuletzt noch erwähnt, dafs die oscillierenden Kugeln in den sämtlichen folgenden Versuchen genau dieselbe Bewegungsfreiheit haben, wie zwei Magnete, die auf Korkscheiben auf der Oberfläche des Wassers schwimmen. Die Ausführung der magnetischen Versuche neben den entsprechenden hydrodynamischen wird die richtige Auffassung der letzteren sehr erleichtern.

**29. Die charakteristischen Konstanten für die Pendelbewegung der Kugeln.** — Schon um die Versuche in qualitativer Hinsicht richtig anstellen und deuten zu können, ist die Kenntnis von für die Bewegung der Kugel charakteristischen Konstanten unentbehrlich. Die erste ist der Abstand des effektiven Trägheitscentrums von dem Mittelpunkte der Kugel.

Es ist nun leicht zu sehen, dafs dieser Abstand $\frac{2}{3}$ des Abstandes zwischen dem Mittelpunkte und dem Schwerpunkte der Kugel beträgt. Denn in der Flüssigkeit hat man sich die Masse der Kugel durch eine in ihrem Mittelpunkte koncentrierte fiktive Masse ergänzt vorzustellen, welche der Masse des halben verdrängten Flüssigkeitsvolumens gleich ist. Das effektive Trägheitscentrum der Kugel wird dann der Schwerpunkt dieser Masse und der wirklichen Masse der Kugel, die wir uns in ihrem Schwerpunkte koncentriert denken. Da sich die Kugel in der Flüssigkeit eben schwebend hält, ist ihre wirkliche Masse genau gleich der des verdrängten Flüssigkeitsvolumens, so dafs man den Schwerpunkt einer Masse 1 im Schwerpunkte und einer Masse $\frac{1}{2}$ im Mittelpunkte der Kugel zu suchen hat, wodurch sich das obige Resultat ergiebt.

Die Schwerpunkte der Kugeln der Figur 13 wurden in der Weise bestimmt, dafs jede an dem Mittelpunkte des Fadens aufgehängt wurde. Sie hängt dann mit der Verbindungslinie zwischen dem Mittelpunkte und dem Schwerpunkte horizontal, und der Schwerpunkt befindet sich vertikal unter dem Aufhängungspunkte. $\frac{2}{3}$ des Abstandes zwischen Mittelpunkt und Schwerpunkt wurde in dieser Weise gleich 0,19 Kugeldiametern gefunden. Dass sich das Centrum der Kugel wirklich auf einem Kreisbogen mit diesem Radius bewegte, wurde auch direkt verificiert, indem durch Spiegelung in der ebenen Wand des Aquariums das Bild einer Millimeterskala zu Koincidenz mit der Schwingungsebene der Kugel gebracht wurde, und der Durchmesser der Kreise abgelesen, auf denen sich gut erkennbare Punkte der Kugel bewegten.

Die übrigen Konstanten sind die Schwingungsdauer und das logarithmische Dekrement der Schwingungen. Beide haben wesentlich nur für die quantitative Diskussion Bedeutung. Die Dauer einer ganzen Schwingung wurde durch einfache Zählung gleich 0,38 Sekunde gefunden. Für die in Winkelmafs gemessenen Schwingungen wurde schliefslich ein logarithmisches Dekrement im Durchschnitt von 0,13 gefunden. Unter Umständen konnte es doch bedeutend gröfser ausfallen, so beispielsweise, wenn sich die Kugeln so nahe an der Oberfläche des Wassers befanden, dafs kleine Wellen gebildet wurden. Solche Nähe der Wasserfläche wurde deshalb bei den Versuchen sorgfältig vermieden.

**30. Longitudinale Oscillationen.** — Bei der Anordnung der Figur 13 erhält man longitudinale Oscillationen, wenn es sich um die Horizontalkomponenten handelt. Da in der Ausgangslage die Mittelpunkte einander näher als die Trägheitscentren sind, so werden sich die Mittelpunkte während der ersten Halbschwingung voneinander entfernen, während der nächsten wieder einander nähern, und so weiter. Man hat also den Fall (Figur 7a) der longitudinalen Oscillationen gegeneinander, und es soll nach der Theorie Anziehung erfolgen. Bei dem Losschlagen sieht man auch sofort, dafs sich die Kugeln einander nähern, und die Anziehung zu einem heftigen Zusammenstofse führt, durch welchen die Kugeln wieder voneinander geschleudert werden.

Die folgende Tabelle giebt von dem Verlaufe der Erscheinung eine Vorstellung. In der ersten Zeile stehen die Abstände zwischen den Trägheitscentren der Kugeln, in Durchmessern $D$ der Kugeln als Einheit gemessen, in der ersten Vertikalkolumne die in Winkel-

maſs gemessenen Anfangsamplituden der Schwingungen. Bei 90° Anfangsamplitude schwingt dann der Mittelpunkt der Kugel ursprünglich auf einem Halbkreise, bei 30° Anfangsamplitude auf einem Bogen von 60°. Die übrigen Zahlen geben die Zeiten vom Losschlagen des Fadens bis zu dem Zusammenstoſse der Kugeln, in Schwingungsdauern der Kugeln als Einheit gemessen. Wo die Tabelle nicht ausgefüllt ist, trat kein Zusammenstoſs mehr ein.

| Anfangs-amplitude | Abstand der Trägheitscentren der Kugeln 1,5 | 2 | 2,5 | 3 $D$ |
|---|---|---|---|---|
| 90° | 3 | 6 | 13 | 35 |
| 30° | 7 | 30 | — | — |

Wie man aus der Tabelle sieht, nimmt die Kraft mit zunehmendem Abstande rasch ab, und ebenso giebt bei gleichem Abstande die kleinere Amplitude die kleinere Kraft.

Wenn man von der durch Figur 13 gegebenen Ausgangslage ausgeht, und den Ring $R'_1$ verschiebt, bis er vertikal unter $R'_2$ kommt, und dann $R'_2$ verschiebt, bis er vertikal über die Lage kommt, wo früher $R'_1$ war, so erhält man die Ausgangslage, welche beim Losschlagen des Fadens longitudinale Oscillationen der Kugeln miteinander giebt. Die Theorie setzt dann Abstoſsung voraus (Figur 7b). Diese tritt auch ein, und zwar um so kräftiger, je gröſser man die Anfangsamplitude wählt, solange sie nur nicht 90° überschreitet. Wenn sie 90° beträgt, und wenn der Anfangsabstand so klein ist, daſs eben nur die Berührung vermieden wird, so werden die Kugeln bis zu einem Abstande von 4 bis 5 Kugeldiametern voneinander geworfen.

Wählt man die Anfangsamplitude bedeutend gröſser als 90°, so kann man bei kleinem Anfangsabstande den Einfluſs der vertikalen Schwingungskomponente nachweisen. Die vertikalen Schwingungen sind nämlich parallel-transversale Schwingungen miteinander (Figur 7c). Sie veranlassen eine Anziehung, welche bei diesen extremen Amplituden stärker ist als die auf den Horizontalschwingungen beruhende Abstoſsung. Das Übergewicht der Anziehung besteht aber nur während der ersten Schläge, denn infolge der schnelleren Dämpfung der Vertikalschwingungen bekommt die Abstoſsung bald die Überhand. Wenn man deshalb einen passenden Anfangsabstand wählt, wird man erst eine Annäherung der Kugeln bemerken, welche bald in Abstoſsung übergeht, ohne daſs es zu Berührung gekommen ist.

In Betreff der reinen Abstofsungserscheinung, bei Anfangsamplituden also, welche 90° nicht überschreiten, ist noch eine wichtige Bemerkung hinzuzufügen. Jede Lage der reinen Abstofsung ist eine instabile Lage. Bei der kleinsten Ungenauigkeit der Aufstellung wird zugleich eine Drehung der Kugeln eintreten, welche zu einer Lage der Anziehung überführt. Dies bemerkt man leicht, wenn man absichtlich eine schiefe Lage wählt. Man richte beispielsweise die Oscillationsebenen der Kugeln miteinander parallel, aber so, dafs sie einen Winkel von 15 bis 20° mit der gemeinschaftlichen Centrallinie bilden. Bei 90° Anfangsamplitude und möglichst kleinem Anfangsabstande wird dann die Drehung und nachfolgende Anziehung so schnell verlaufen, dafs man keine Abstofsung mehr entdeckt. Ist man hierauf nicht aufmerksam, so wird man den Versuch leicht mifsverstehen können.

Eben in solchen Nebenumständen, wie diese Instabilität in den Abstofsungslagen, tritt die Analogie mit dem Magnetismus am deutlichsten hervor. Bei dem Versuche mit Magneten, welche auf Korkscheiben schwimmen, tritt die magnetische Anziehung wie die hydrodynamische regelrecht ein, selbst bei weniger genauer Einstellung. Reine Abstofsung erhält man dagegen nur bei sehr sorgfältiger Einstellung; bei schiefer Ausgangslage ergiebt sich genau wie in dem hydrodynamischen Versuche Drehung mit nachfolgender Anziehung. Hat man ein passendes Verhältnis zwischen den magnetischen Momenten und den Trägheitsmomenten der schwimmenden Systeme getroffen, so verlaufen die hydrodynamischen und die magnetischen Erscheinungen mit einer geradezu verblüffenden Ähnlichkeit.

**31. Parallel-transversale Oscillationen.** — Wir können nun die Ringe $R_1$, $R_2$, $R'_1$, $R'_2$ so stellen, dafs die Vertikalebenen $R_1 M_1 M_2 R_2$ und $R'_1 M'_1 M'_2 R'_2$ unter einander parallel werden, und so die Trägheitscentren der Kugeln auf einer und derselben Normalen zu diesen Ebenen liegen. Bei dem Losschlagen werden dann parallel-transversale Oscillationen (Figur 7c und d) eintreten.

Wenn diese Oscillationen miteinander verlaufen, so tritt die erwartete Anziehung ein, und zwar mit derselben Präcision wie im vorigen Falle. Nur zeigen sich die Kräfte etwas weniger grofs, und dies stimmt auch mit der Theorie überein, wie ein Vergleich der Formeln 17 ($f_1$) und ($f_2$) zeigt. Man sieht das sofort aus der folgenden Tabelle, in welcher die Zeiten von dem Losschlagen des Fadens bis zu dem Zusammenstofse der Kugeln in Schwingungsdauern der Kugel als Zeiteinheit, in genau derselben Weise wie oben, gegeben werden.

| Anfangs-amplitude | Abstand der Trägheitscentren der Kugeln 1,5 | 2 | 2,5 $D$ |
|---|---|---|---|
| 90° | 4,5 | 18 | — |
| 30° | 13 | — | — |

In dem äuſseren Verlaufe der Erscheinung bemerkt man auch insofern einen Unterschied, als wegen der veränderten Richtung der Schwingungen der Zusammenstoſs nicht mehr so heftig ist. Es kommt deshalb zu keinem heftigen Auseinanderschleudern der Kugeln wie im Falle der longitudinalen Oscillationen. Sie entfernen sich vielmehr nach dem Zusammenstoſse nur ganz wenig voneinander, um wieder bis zur Berührung angezogen zu werden, sofern nicht die Schwingungen schon zu stark abgenommen haben.

Der Abstoſsungsversuch gelingt wieder bei sorgfältiger Einstellung vollständig nach Erwarten. Ist der Anfangsabstand möglichst klein, und die Anfangsamplitude 90°, so genügt die Abstoſsung, um die Kugeln bis zu einem Centralabstande von zwei oder drei Kugeldiametern voneinander zu treiben. Wenn man aber noch gröſsere Anfangsamplituden wählt, so tritt die Komplikation ein, daſs die Anziehung, welche auf der vertikalen Schwingungskomponente beruht, stärker wird als die auf der horizontalen Komponente beruhende Abstoſsung. Sehr deutlich tritt dies beispielsweise bei einer Anfangsamplitude von 135° ein. Bei hinlänglich kleinem Anfangsabstande tritt dann eine Anziehung ein, welche zu Berührung und nachfolgender Entfernung führt. Vergröſsert man dagegen den Abstand etwas, so geht die Anziehung infolge der stärkeren Dämpfung der vertikalen Schwingungskomponente in starke Abstoſsung über, ehe es zur Berührung gekommen ist.

Bei diesem Abstoſsungsversuche ist noch zu bemerken, daſs die Instabilität der Abstoſsungslage noch stärker hervortritt als bei den longitudinalen Oscillationen. Hat man 90° Anfangsamplitude und möglichst kleinen Anfangsabstand gewählt, so genügt es, daſs man in der Anfangslage die Mittelpunkte anstatt die Trägheitscentren einander gegenüberstellt, um als Resultat eine so schnelle Drehung mit nachfolgender Anziehung zu erhalten, daſs man leicht den Versuch miſsverstehen und die Erscheinung als eine reine Anziehungserscheinung auffassen kann. Diese Instabilität mit den daran geknüpften kombinierten Bewegungen hat wieder das Interesse, daſs dadurch die Analogie mit dem Magnetismus am aller schärfsten hervortritt. Denn die auf Korkscheiben schwimmenden Magnetnadeln

zeigen in ihren Bewegungen die auffälligste Übereinstimmung mit den Bewegungen der oscillierenden Kugeln.

**32. Vergleich mit der Theorie in quantitativer Beziehung.** — Für eine schärfere quantitative Prüfung eignen sich die beschriebenen Versuche aus leicht ersichtlichen Gründen nicht, obgleich doch besser als die Versuche mit den fallenden Kugeln. Und jedenfalls wird es von Bedeutung sein zu konstatieren, daſs wenigstens der Gröſsenordnung nach alles in Übereinstimmung mit den Forderungen der Theorie verläuft.

Die Formel **17** ($f_1$) giebt die Anziehungskraft $F$, welche zwischen longitudinal oscillierenden Kugeln auftritt. Da in den Versuchen beide Kugeln Bewegungen gleicher Intensität haben, können wir in der Formel $\dot S = \dot S'$ einführen. Wenn wir nachher mit der effektiven trägen Masse $M$ einer Kugel dividieren, so finden wir ihre Beschleunigung:

$$G_l = 6\,\frac{q}{M}\;\frac{\dot S^2}{4\pi r^4}. \tag{a}$$

Nach **15** (a) ist das Aktionsmoment $\dot S$ einer Kugel gleich $\frac{3}{2}E\dot s$, wo $\dot s$ die Oscillationsintensität ist. Wenn wir wieder Durchmesser $D$ und Schwingungsdauer $T$ der Kugel als Längen- und Zeiteinheit einführen, so wird das Volumen $E$ der Kugel gleich $\frac{1}{6}\pi$, und die Oscillationsintensität $\dot s$ wird nach **13** (A) gleich $\sqrt{2}\,\pi a$, wo $a$ die Amplitude der Schwingungen ist. Das Aktionsmoment einer Kugel wird deshalb $\dot S = \frac{\sqrt{2}}{2^2}\pi^2 a$, und es wird

$$\frac{\dot S^2}{4\pi r^4} = \frac{\pi^3 a^2}{2^5 r^4}, \tag{b}$$

entsprechend **23** (b) für die fallenden Kugeln vom spezifischen Gewichte $\frac{1}{2}$. Entsprechend **23** (c) erhalten wir weiter in dem Maſssystem $D$, $T$:

$$\frac{q}{M} = \frac{4}{\pi}. \tag{c}$$

Der Zähler ist 4 anstatt 8, weil die unter dem Wasser oscillierende Kugel genau doppelt so groſse effektive Masse hat, als die an der Oberfläche auf- und niedertauchende, auf welche sich **23** (c) bezieht. Man findet dann:

$$G_l = 3\left(\frac{\pi a}{2 r^2}\right)^2. \tag{d$_1$}$$

Im Falle der transversalen Oscillationen ist die Kraft [17 ($f_2$)] und folglich auch die Beschleunigung halb so grofs, also:

$$(d_2) \qquad G_t = \tfrac{3}{2}\left(\frac{\pi a}{2 r^2}\right)^2.$$

Wie bei dem Versuche mit den fallenden Kugeln ist die Beschleunigung aus zwei Gründen veränderlich: wegen des abnehmenden Abstandes zwischen den Kugeln nimmt sie zu, wegen der Dämpfung der Schwingungen nimmt sie dagegen ab. Je nach dem Anfangsabstande wird die eine oder die andere Wirkung den gröfsten Einflufs haben, und indem wir von kleineren Fehlern, welche jedenfalls die Gröfsenordnungen nicht berühren, absehen, rechnen wir, als hätte die Beschleunigung während der ganzen Bewegung denselben Wert, wie zu der Anfangszeit. Der von jeder Kugel vor dem Zusammenstofse zurückgelegte Weg $l$ beträgt wieder $\frac{r-1}{2}$, entsprechend **23** (f), und durch Einsetzen in die Formel **23** (e) ergiebt sich die gesuchte Zeit für den Fall der longitudinalen, beziehungsweise der transversalen Schwingungen:

$$(e) \qquad t_l = \frac{2 r^2}{\pi a}\sqrt{\frac{r-1}{3}}, \qquad t_t = \frac{2 r^2}{\pi a}\sqrt{\frac{2(r-1)}{3}}.$$

Bei 90° Anfangsamplitude wird die lineare Amplitude der Horizontalschwingungen gleich dem Abstande zwischen dem Mittelpunkte und dem effektiven Trägheitscentrum der Kugel, also gleich 0,19 $D$. Bei 30° Anfangsamplitude wird sie genau halb so grofs, also gleich 0,095 $D$. Wenn wir diese Werte der Amplitude und die Werte des Abstandes $r$ zwischen den Trägheitscentren der Kugeln nach den Tabellen (**30**) und (**31**) einsetzen, so ergeben sich für den Fall der longitudinalen Schwingungen die folgenden Resultate:

| Anfangs-amplitude | Abstand der Trägheitscentren der Kugeln 1,5 | 2 | 2,5 | 3 $D$ |
|---|---|---|---|---|
| 90° | 3,8 | 7,7 | 14,8 | 24,5 |
| 30° | 7,5 | 15,3 | — | — |

Entsprechend findet man für den Fall der transversalen Oscillationen:

| Anfangs-amplitude | Abstand der Trägheitscentren der Kugeln 1,5 | 2 | 2,5 $D$ |
|---|---|---|---|
| 90° | 5,4 | 11 | 21 |
| 30° | 10,8 | — | — |

Der Vergleich dieser Tabellen mit den Tabellen (30) und (31) zeigt, dafs die einander entsprechenden Zahlen durchaus gleicher Gröfsenordnung sind. Wenn die Abstände über eine gewisse Grenze hinaus zunehmen, so nehmen selbstverständlich die experimentell gefundenen Zeiten viel rascher als die berechneten zu, und zuletzt übersteigt der Unterschied jede Grenze, wenn nämlich die Kugeln nicht mehr in Berührung kommen. Dieses beruht aber ausschliefslich auf der Unvollständigkeit der Rechnung, wo weder die Dämpfung der Schwingungen, noch die Reibungswiderstände gegen die fortschreitende Bewegung der Kugeln berücksichtigt sind. Auffälliger kann es dagegen auf der anderen Seite erscheinen, dafs bei den kleinsten Abständen die Versuche zum Teil kleinere Zeiten als die Rechnung geben. Man bemerkt aber, dafs merkliche Abweichungen in dieser Richtung nur in den Fällen vorkommt, wo die Anfangsamplitude 90° ist. In diesem Falle wäre aber auch die Vertikalkomponente der Oscillationen zu berücksichtigen, welche immer eine Verstärkung der Anziehung zur Folge hat. Versucht man schätzungsweise die Wirkung dieser Oscillationen mitzunehmen, so kommt man in der That auch zu Zahlen, welche etwas besser mit den experimentell gefundenen übereinstimmen. Die Frage der etwas gröfseren oder etwas kleineren Übereinstimmung hat aber wenig Bedeutung, solange die Versuche noch an sich so unvollkommen sind, und es ist uns jedenfalls gelungen zu konstatieren, dafs die Kräfte, welchen wir in den Versuchen begegnet sind, wirklich die nach der Theorie zu erwartende Gröfsenordnung haben.

**33. Drehung der Kugeln in einer gemeinschaftlichen Horizontalebene.** — Wir haben schon mehrmals die Drehung der Kugeln von den instabilen Abstofsungslagen aus erwähnt. Die dabei thätigen Drehungsmomente sind in der longitudinal-transversalen Lage (Figur 7e und f) am kräftigsten entwickelt. Um diese Lage als Ausgangslage zu erhalten, stellt man die Ringe $R_1$, $R_2$ und $R'_1$, $R'_2$ (Figur 13) so ein, dafs die Vertikalebenen $R_1 M_1 M_2 R_2$ und $R'_1 M'_1 M'_2 R'_2$ zu einander senkrecht werden, und verschiebt die eine dieser Ebenen, bis sie durch das Trägheitscentrum der anderen Kugel passiert.

Bei dem Losschlagen von der somit definierten Ausgangslage treten die folgenden Bewegungen ein. Wenn die Anfangsamplitude 90°, und der Anfangsabstand 1,5 Kugeldiameter ist, so dreht sich die Schwingungsebene der transversal schwingenden Kugel während etwa vier Schlägen um 90°; gleichzeitig dreht sich die Schwingungs-

ebene der longitudinal oscillierenden Kugel um etwa 20°, und unmittelbar nachdem die Drehungen soweit fortgeschritten sind, erfolgt der Zusammenstofs wegen der Anziehung. Wird der Anfangsabstand auf zwei Kugeldiameter vergröfsert, so werden die Drehungen langsamer. Die Anziehung wird aber noch mehr verzögert, und die anfänglich transversal schwingende Kugel hat Zeit, wie eine Kompafsnadel an der Gleichgewichtslage vorbeizuschwingen, während die anfänglich longitudinal schwingende nach einem Ausschlage von etwa 20° infolge des veränderten Vorzeichens des Drehungsmomentes umkehrt.

Qualitativ betrachtet haben diese Bewegungen genau den Verlauf, den wir nach dem theoretischen Resultate (9,6) oder nach den Formeln 17 ($f_3$) und ($f_4$) zu erwarten haben. Nach diesen Resultaten wird jede Kugel von einem Kräftepaar angegriffen, und zwar die transversal oscillierende von einem doppelt so grofsen wie die longitudinal oscillierende. Von den Drehungen der Kugeln wird deshalb die der ursprünglich transversal schwingenden bei weitem die auffälligste sein. Jede dieser Wirkungen hat als Gegenwirkung eine Drehung der Verbindungslinie der Kugeln. Obgleich somit diese Verbindungslinie von einem Kräftepaar gedreht wird, welches an Gröfse der Summe der beiden vorhergehenden gleich ist, so wird doch die resultierende Bewegung eine schwer beobachtbare, wie man sofort sieht, wenn man sich der Gröfse der zu überwindenden Trägheitsmomente erinnert. Denn jedes der ersten zwei Kräftepaare hat nur das Trägheitsmoment einer Kugel in Bezug auf eine Achse durch ihr effektives Trägheitscentrum zu überwinden. Bei der Drehung der Verbindungslinie der Kugeln mufs aber das effektive Trägheitsmoment beider Kugeln in Bezug auf ihren gemeinschaftlichen Schwerpunkt überwunden werden, und dieses Trägheitsmoment ist von einer ganz anderen Gröfsenordnung als das jeder einzelnen Kugel.

Anstatt das unmittelbare Ergebnis der hydrodynamischen Formeln kann man auch den entsprechenden magnetischen Versuch zum Vergleich heranziehen. Wenn man zwei auf Korkscheiben schwimmende Magnete aus der longitudinal-transversalen Lage losläfst, so treten Bewegungen ein, welche in der auffälligsten Weise mit den beschriebenen Bewegungen der oscillierenden Kugeln übereinstimmen. Die stärkste Drehung ist die der ursprünglich transversal gestellten Magnetnadel. Bedeutend schwächer dreht sich die ursprünglich longitudinal eingestellte Magnetnadel, und diese kehrt auch zuerst um, nachdem sich die Vorzeichen der Drehungsmomente

verändert haben. Die Drehung der Verbindungslinie der Magneten ist schliefslich gar nicht, oder nur sehr schwer beobachtbar, wenn man nicht verfeinerte Beobachtungsmethoden einführt.

Was man bei den beschriebenen hydrodynamischen Versuchen unmittelbar sieht, ist eine Drehung der Schwingungsebenen der Kugeln. Dieses ist auch nach der Theorie die primäre Erscheinung (8). Markiert man aber auf der Kugel einen Strich, welcher die Lage der Schwingungsebene in der Kugel angiebt, zu der Zeit, wenn die Schwingungen anfangen, so wird man sehen, dafs dieser Strich im wesentlichen die Bewegung der Schwingungsebene mitmacht.

Wir haben es also mit der zusammengesetzten Erscheinung einer Drehung sowohl der Oscillationsebene, wie der Kugel selbst zu thun (8). Dies kommt offenbar daher, dafs die Schwingungen der Kugel nicht in einfachen geradlinigen, sondern in drehenden Oscillationen bestehen, die ihre Schwingungsebene in der Kugel zu behaupten suchen. Vollständig gelingt dies aber nicht, denn man bemerkt immer, oder fast immer, dafs die Drehung der Kugel und der Schwingungsebenen etwas verschieden sind.

Mehr voneinander unabhängig schienen die Drehungen der Oscillationsebene und der Kugeln bei den Doppelkugeln (Figur 12) zu sein, mit welchen der Drehungsversuch zum ersten Male ausgeführt wurde. Denn wegen der kleineren Amplituden nähern sich die Schwingungen hier mehr geradlinigen, und die Stabilität der Schwingungsebene in der Kugel wird weniger ausgesprochen. Aber auch hier zeigt sich immer eine Tendenz der Kugeln, die Drehung der Oscillationsebene mitzumachen.

**34. Die Grundschwingungen des Systems.** — Die beschriebenen Bewegungserscheinungen, welche also eintreten, wenn die longitudinal-transversale Lage die Ausgangslage bildet, sind zu kompliciert, um eine geeignete Grundlage quantitativer Diskussionen zu bilden. Nach den bekannten mechanischen Prinzipien für die Schwingungen eines Systems um eine Gleichgewichtslage mufs es aber möglich sein, gewisse Bewegungen einfacherer Natur aufzusuchen, die sich dazu besser eignen.

Wenn wir von den Anziehungen und Abstofsungen absehen, und nur die Drehungen betrachten, so läfst sich die fragliche Bewegungserscheinung mit Hilfe von zwei unabhängigen Variabeln beschreiben. Wenn ein solches System eine kleine Bewegung um eine Gleichgewichtslage ausführt, so wird man die Bewegung immer

als das Superpositionsresultat zweier einfacher Schwingungen ansehen können, und unter gewissen Anfangsbedingungen wird nur die eine oder nur die andere dieser einfachen Schwingungen eintreten. Ohne jedes Rückgreifen auf theoretische Untersuchungen kann man leicht mit zwei aufgehängten, oder auf Spitzen beweglichen Magnetnadeln diese zwei Grundschwingungen herausexperimentieren. Wenn die zwei Magnetnadeln gleiche magnetische Momente und gleiche Trägheitsmomente haben, so treten die Grundschwingungen ein, wenn die magnetischen Achsen in der Ausgangslage, und folglich auch wegen der Symmetrie in allen späteren Lagen gleiche Winkel mit der Verbindungslinie bilden. Die Grundschwingung mit der längeren Periode ist die, welche durch die Figur 14a illustriert ist, wo die Schwingungen in Bezug auf eine zu der Verbindungslinie der Magnete senkrechte Ebene symmetrisch sind. Die kürzere Periode hat man dagegen in dem Falle 14b, wo die magnetischen Achsen während der Bewegung immer miteinander parallel bleiben.

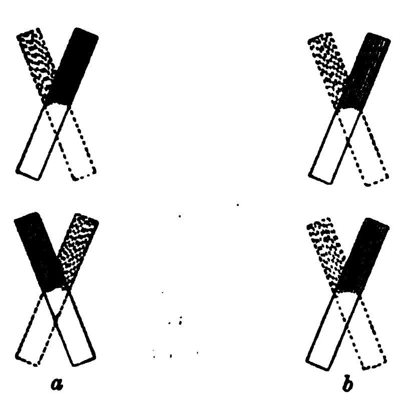


Fig. 14.

Bei der Ausführung des entsprechenden hydrodynamischen Versuches hat man die Schwierigkeit, dafs der Zusammenstofs der Kugeln schon nach Verlauf eines Bruchteiles einer einzigen Schwingung eintritt. Bei einem Anfangsabstande von zwei Kugeldiametern gelingt es jedoch, den ersten Durchgang der Schwingungsebene der Kugeln durch die Gleichgewichtslage zu beobachten. Es wurde wieder 90° Anfangsamplitude gewählt, und die Schwingungsebenen bildeten in der Ausgangslage Winkel von 20 bis 30° mit der Verbindungslinie. Als Mittel von mehreren Zählungen wurde dann gefunden, dafs die Schwingungsebenen in einem Falle nach 6 bis 7, in dem anderen nach etwa 4 Schwingungen der Kugeln durch die Gleichgewichtslage passierten. Durch Multiplikation mit 4 finden wir dann für die Dauer der zwei Perioden die Werte:

$$\tau_1 = 26\,T, \qquad \tau_2 = 16\,T.$$

**35. Drehung der Kugeln um eine gemeinschaftliche vertikale Achse.** — Aufser den zwei betrachteten Drehungsmomenten giebt es noch ein drittes, welches die Kugeln um ihre gemeinschaftliche

Verbindungslinie zu drehen sucht, und dieses ist in der normal-transversalen Lage (Figur 7g) am stärksten entwickelt. Diese Lage kann man erhalten, wenn man die Kugeln vertikal übereinander anbringt, und die Ebenen $R_1 M_1 M_2 R_2$ und $R'_1 M'_1 M'_2 R'_2$ zu einander senkrecht einstellt.

Die Drehung verläuft vollständig nach Erwarten. Bei 1,5 Kugeldiametern Anfangsabstand und 90° Anfangsamplitude drehten sich die Schwingungsebenen der Kugeln gegeneinander, so daſs sich jede nach etwa 6 Oscillationen um 45° gedreht hatte. Infolge ihrer Trägheit überschritten sie die somit erreichte Gleichgewichtslage. Mehrere Schwingungen konnten nicht beobachtet werden. Denn teils hatten die Schwingungen zu stark wegen der Dämpfung abgenommen, teils waren die Kugeln zu weit voneinander gekommen. Dieses beruht auf dem Einfluſs der vertikalen Schwingungskomponente, welche in diesem Falle Abstoſsung, anstatt wie in allen früheren Fällen, Anziehung veranlaſst. Denn jetzt sind die Vertikaloscillationen longitudinale Oscillationen miteinander, anstatt wie früher transversale Oscillationen miteinander.

Zum Vergleiche mit den oben gefundenen Schwingungsdauern $\tau_1$ und $\tau_2$ wurden auch einige Zählungen bei einem Anfangsabstande von 2 Kugeldiametern und Abweichungswinkeln der Schwingungsebenen von der Gleichgewichtslage von 20 bis 30° gemacht. Es ergab sich dann bei der gewöhnlichen Anfangsamplitude von 90°, daſs die erste Viertelperiode gleich etwa 8 Schwingungsdauern der Kugel war. Dabei ist jedoch zu bemerken, daſs die Drehung unter Entfernen der Kugeln voneinander vor sich ging, so daſs man auf einmal mit zwei Ursachen der Abnahme der Kraft zu rechnen hatte, nämlich sowohl der wachsenden Entfernung wie der Dämpfung der Schwingungen. Die Abstoſsung wurde deshalb dadurch kompensiert, daſs die obere Kugel etwas schwerer, die untere etwas leichter als das Wasser gemacht wurde, so daſs die Drehung, wie bei den anderen Versuchen, unter ziemlich rascher Annäherung der Kugeln gegeneinander stattfand. Es ging dann die gesuchte Viertelperiode auf etwa 4 bis 5 Schwingungsdauern der Kugel herunter, wonach die ganze Periode zu etwa

$$\tau_3 = 18T$$

geschätzt wurde.

**36. Quantitatives über die Drehungserscheinung.** — Um die Schwingungsdauern $\tau_1$, $\tau_2$ und $\tau_3$ zu berechnen, müssen wir auf die

Kräftefunktion **17** (d) in völlig entwickelter Form zurückgreifen. Es stellen $\theta$ und $\theta'$ die Winkel dar, welche die Oscillationsachsen der beiden Kugeln mit der Verbindungslinie der Kugelcentren bilden, und es sei $\vartheta$ der Winkel zwischen den Ebenen, welche die zwei Oscillationsachsen zusammen mit der Verbindungslinie der Kugeln bestimmen. Die Kräftefunktion läfst sich dann in der Form (vergl. I, **199** (f), S. 291)

$$\Psi = q \frac{\mathfrak{S}\mathfrak{S}'}{4\pi r^3}\{\sin\theta \sin\theta' \cos\vartheta + 2\cos\theta\cos\theta'\} \tag{a}$$

schreiben.

Bei den Versuchen, wo sich die Kugeln in einer gemeinschaftlichen Horizontalebene bewegen, ist $\vartheta = 0$, und somit

$$\Psi = q \frac{\mathfrak{S}\mathfrak{S}'}{4\pi r^3}\{\sin\theta\sin\theta' + 2\cos\theta\cos\theta'\}.$$

Durch Differentiation nach $\theta$ ergiebt sich das Drehungsmoment, welches diesen Winkel zu verändern sucht, nämlich:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = q \frac{\mathfrak{S}\mathfrak{S}'}{4\pi r^3}\{\cos\theta\sin\theta' - 2\sin\theta\cos\theta'\}.$$

Wir nehmen nun an, dafs die Winkel $\theta$ und $\theta'$ so klein sind, dafs die Cosinusse durch Eins, und die Sinusse durch die Winkel ersetzt werden können. Gleichzeitig setzen wir $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}'$, da die Aktionsmomente der zwei Kugeln bei den Versuchen einander immer gleich sind. Wenn wir zur Abkürzung

$$A = q \frac{\mathfrak{S}^2}{4\pi r^3} \tag{b}$$

einführen, so wird

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = -A(2\theta - \theta').$$

Als Folge der Thätigkeit der Drehungsmomente erhalten die Kugeln die Winkelgeschwindigkeiten $\dot{\theta}$ und $\dot{\theta}'$, und das System der beiden Kugeln folglich die lebendige Kraft

$$E = \tfrac{1}{2} J \dot{\theta}^2 + \tfrac{1}{2} J \dot{\theta}'^2,$$

wo $J$ das Trägheitsmoment einer Kugel ist. Durch Einsetzen in die LAGRANGE'sche Bewegungsgleichung

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial E}{\partial \theta} = \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}$$

ergiebt sich nun

$$\ddot{\theta} = -\frac{A}{J}(2\theta - \theta').$$

Durch Umtausch der gestrichelten und der nicht gestrichelten Buchstaben ergiebt sich die entsprechende Bewegungsgleichung für die Variable $\theta'$, und durch Integration dieses Systems von zwei Gleichungen findet man die allgemeinste Bewegung des Systems. Eine Grundschwingung des Systems tritt ein, wenn eine der Bedingungen $\theta' = \theta$, oder $\theta' = -\theta$ erfüllt ist. Die Gleichung reduciert sich dann auf

$$\ddot{\theta} = -\frac{A}{J}\theta \qquad \text{oder} \qquad \ddot{\theta} = -3\frac{A}{J}\theta$$

beziehungsweise. Diese haben beide die Form der gewöhnlichen Pendelgleichung, und die Perioden der entsprechenden Pendelschwingungen werden

$$\text{(c)} \qquad \tau_1 = 2\pi\sqrt{\frac{J}{A}} \qquad \text{und} \qquad \tau_2 = 2\pi\sqrt{\frac{J}{3A}}$$

beziehungsweise.

Die Berechnung dieser Schwingungsdauern erfordert die Kenntnis des Trägheitsmomentes, mit dem die Kugel der Wirkung des Drehungsmomentes widerstrebt. Die Achse, um welche die Drehung stattfindet, ist vertikal, und geht durch das effektive Trägheitscentrum der Kugel. Wenn die Schwingungen eine Amplitude von 90° haben, so steht in den Umkehrlagen die Achse senkrecht zu der Linie, welche den Mittelpunkt und das Trägheitscentrum der Kugel verbindet. Nun wird aber in dieser Lage und in ihrer Nähe die Kugel am kräftigsten von der hydrodynamischen Fernkraft angegriffen, und wir haben mit dem Trägheitsmoment in Bezug auf diese Achse in erster Linie zu rechnen. Da außerdem die anderen Trägheitsmomente, welche in Frage kommen, nicht so sehr abweichende Werte haben, so erhalten wir für unsere Zwecke völlig hinreichende Genauigkeit, wenn wir mit diesem einen konstanten Trägheitsmomente rechnen.

Dieses Trägheitsmoment ist aber genau dasselbe, welches sich bei den Pendelschwingungen der Kugel geltend macht, und es läßt sich aus der bekannten Dauer dieser Schwingungen berechnen. Die

Kugel betrachten wir dann wie ein Pendel, wo das effektive Trägheitscentrum den Aufhängungspunkt bildet, während eine Kraft gleich dem Gewicht im Schwerpunkte, und eine Kraft gleich dem Auftriebe in dem Mittelpunkte der Kugel angreift. Diese Kräfte sind entgegengesetzt gerichtet, und beide haben die Intensität $qEg$, wo $E$ wie früher das Volumen der Kugel, und $g$ die Beschleunigung der Schwere ist. Der Abstand ihrer Angriffspunkte ist $\frac{3}{2}L$, wenn $L$ den Abstand zwischen dem Mittelpunkte und dem effektiven Trägheitscentrum darstellt. Ist nun $J$ das Trägheitsmoment, so finden wir nach dem bekannten Pendelgesetz als Wert der Schwingungsdauer:

$$\text{(d)} \qquad T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{\frac{3}{2} L \cdot q E g}}.$$

Wir gehen nun zu dem in den Versuchen angewendeten Einheitssysteme $T, D$ über. Es ist dann in (d) $T = 1$ und $E = \frac{1}{6}\pi$ zu substituieren. Durch Auflösung nach $J$ ergiebt sich dann:

$$J = q \frac{gL}{2^4 \pi}.$$

In demselben Einheitssystem wird der Wert von $A$

$$A = q \frac{\pi^3 L^2}{2^5 r^3},$$

wie sofort der Vergleich der Formel (b) mit der nahe verwandten **32** (b) zeigt. Wenn wir diese Werte von $A$ und $J$ in die erste Formel (c) einsetzen, so wird:

$$\text{(e)} \qquad \tau_1 = \frac{2r}{\pi} \sqrt{\frac{2gr}{L}}.$$

Der Wert von $\tau_2$ ergiebt sich, wenn wir $\tau_1$ mit $\sqrt{3}$ dividieren.

Die Beschleunigung der Schwere mufs hier in dem Mafssysteme $D, T$ ausgedrückt werden. Da $D = 6{,}8$ cm (**21**), und $T = 0{,}38$ sec (**29**), so wird

$$g = 982 \frac{\text{cm}}{\text{sec}^2} = 20{,}8 \frac{D}{T^2}.$$

Der Abstand $L$ zwischen Mittelpunkt und Schwerpunkt beträgt $0{,}19\,D$ (**29**), und schliefslich ist bei sämtlichen Versuchen der Anfangsabstand gleich zwei Kugeldiametern gewesen, also $r = 2\,D$. Setzt man diese Zahlenwerte ein, so findet man

$$\tau_1 = 27{,}8 \qquad \tau_2 = 15{,}7$$

anstatt die experimentell gefundenen Werte 26 und 16.

Wenn es sich um die Drehungen handelt, welche um die Verbindungslinie der Kugeln als Achse stattfinden, so haben wir in (a) $\theta = \theta' = \frac{\pi}{2}$ zu setzen. Es wird dann:

$$\Psi = A \cos \vartheta.$$

Wir differentiieren nach $\vartheta$ und ersetzen nachher den Sinus durch den Bogen. Es wird dann:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \vartheta} = -A \vartheta.$$

Drehen sich nun die Kugeln mit gleichen und entgegengesetzten Winkelgeschwindigkeiten um die Verbindungslinie, so wird jede die Winkelgeschwindigkeit $\frac{1}{2}\dot{\vartheta}$ haben, und die lebendige Kraft des Systems wird:

$$E = \tfrac{1}{2} J (\tfrac{1}{2}\dot{\vartheta})^2 + \tfrac{1}{2} J (\tfrac{1}{2}\dot{\vartheta})^2 = \tfrac{1}{4} J \dot{\vartheta}^2.$$

Die Bewegungsgleichung wird dann

$$\ddot{\vartheta} = -\frac{2A}{J}\vartheta,$$

und die entsprechende Schwingungsdauer:

$$\tau_3 = 2\pi \sqrt{\frac{J}{2A}}.$$

Wie der Vergleich mit (c) zeigt, ergiebt sich also $\tau_3$ aus $\tau_1$ durch Division mit $\sqrt{2}$, so dafs wir

$$\tau_3 = 19{,}2$$

finden, während das experimentelle Resultat, bei dem wir stehen geblieben sind, 18 war.

Einen grofsen positiven Wert darf man diesen Resultaten in quantitativer Hinsicht nicht beilegen. Dazu sind die Versuche zu unvollkommen, und diesen Unvollkommenheiten entsprechend haben wir die Rechnungen nur schätzungsweise geführt, wo die genauere Durchführung umständlich war. Der Zufall dürfte die Übereinstimmung gröfser gemacht haben, als unter diesen Umständen zu

erwarten war. Von der Gröfsenordnung möglicher Fehler giebt die Bestimmung von $\tau_3$ (**35**) eine gute Vorstellung. So viel steht aber fest, dafs sich bis jetzt kein Zeichen einer sicher konstatierbaren Nicht-Übereinstimmung gezeigt hat. Schon dieses ist ein Resultat von bedeutendem Interesse, da man sonst in der Hydrodynamik in Bezug auf Übereinstimmungen der theoretiseh abgeleiteten Resultate mit den Ergebnissen der Versuche nicht eben verwöhnt ist. Zu der Frage über die Ursache, warum wir hier nicht den bekannten grofsen Abweichungen begegnet sind, die sonst so oft bei hydrodynamischen Untersuchungen zwischen Theorie und Erfahrung auftreten, oder aufzutreten scheinen, werden wir später zurückkehren (**67**).

**37. Schwingungen einer Kugel in der Nähe einer vertikalen Wand.** — Bei sämtlichen beschriebenen Versuchen ist es wichtig zu beachten, dafs man die Kugeln in der Ausgangslage nie zu nahe an eine Wand des Gefäfses aufstellen darf. Denn dadurch können schwere Störungen eintreten.

Über die Natur dieser Störungen orientiert man sich leicht, wenn man Versuche mit einer einzigen Kugel in der Nähe einer der Wände des Gefäfses macht. Man findet dann dasselbe Resultat wieder, dem wir schon bei den Versuchen mit einer fallenden Kugel begegnet sind (**26**). Die Kugel wird sich in jedem Falle genau so bewegen, als ob das Spiegelbild der Kugel in der Wand eine wirkliche Kugel wäre, und als ob sich die Flüssigkeit durch die Wand fortsetzte, und überhaupt keine Wand da wäre. Theoretisch gilt dies nur streng, solange die Wand unendlich ausgedehnt, und die Flüssigkeit sonst unbegrenzt ist. In der Praxis wird es aber gelten, solange die Dimensionen der Wand grofs sind im Verhältnis zu ihrem Abstande von der Kugel und im Vergleich zu den Abständen von den übrigen Wänden.

Die wichtigsten Spezialfälle, denen man in dieser Weise begegnet, sind die folgenden:

1. Die Kugel schwingt senkrecht zu der Wand. Die Kugel und ihr Spiegelbild führen dann zusammen longitudinale Schwingungen gegeneinander aus, und es resultiert eine Anziehung der Kugel nach der Wand hin, wobei alles quantitativ nach der Tabelle (**30**) verläuft.

2. Die Kugel schwingt parallel zu der Wand. Die Kugel und ihr Spiegelbild führen dann parallel-transversale Schwingungen miteinander aus, und es resultiert wieder Anziehung, wobei alles quantitativ nach der Tabelle (**31**) verläuft.

3. Die Oscillationsachse bildet einen beliebigen Winkel mit der Wand. In diesem Falle treten superponierte Drehungs- und Anziehungsbewegung ein. Dabei sind die Drehungen diejenigen, welche durch den Magnet in Figur 14a illustriert sind, und welche der tiefsten Grundschwingung des Systems von den zwei bewegten Kugeln entsprechen.

Wenn man sich so stellt, dafs man gleichzeitig die Kugel und ihr Spiegelbild an der Wand sieht, so verlaufen die Versuche in täuschender Ähnlichkeit mit den entsprechenden Versuchen mit zwei Kugeln. Nur ist die Präcision der eintretenden Bewegungen noch gröfser, entsprechend dem absoluten Synchronismus in der Bewegung der reellen Kugel und ihres Spiegelbildes.

**38. Über die beste Konstruktion der Kugeln.** — Die Versuche mit Pendelbewegungen von Kugeln unter dem Wasser sind die einfachsten, durch welche man die ganze Reihe von hydrodynamischen Fernwirkungen zwischen oscillierenden Kugeln nachweisen kann. Alle später zu beschreibenden Versuche erfordern bedeutend gröfsere instrumentelle Hilfsmittel. Eine wichtige Frage wird deshalb die von der besten Konstruktion der Kugeln.

Zunächst sind die absoluten Dimensionen belanglos, solange man die innere Massenverteilung ähnlich behält. Dieser Satz erhellt einerseits aus den Formeln **32**(d) und (e), und **36**(e), welche die absoluten Dimensionen der Kugeln nicht enthalten. Man leitet ihn andererseits auch mit Hilfe des Prinzipes von den geometrisch ähnlichen Flüssigkeitsbewegungen ab durch ähnliche Überlegungen, wie wir sie für die fallenden Kugeln angestellt haben (**24**). Solange man den Durchmesser einer Kugel als Längeneinheit, und deren Schwingungsdauer als Zeiteinheit anwendet, wird man deshalb mit Kugeln aller Dimensionen genau dieselben Resultate erhalten, und man hat die Freiheit, die Dimensionen nach äufseren Zweckmäfsigkeitsrücksichten zu wählen.

Das einzige Wichtige wäre also die innere Massenverteilung. Die gröfste Intensität der hydrodynamischen Fernkräfte erhält man unter sonst gleichen Umständen, wenn man möglichst grofse Amplituden und möglichst hohe Schwingungszahlen erreicht. Sowohl die Amplituden wie die Schwingungszahlen verändern sich nun in vorteilhafter Richtung, wenn die Massen soviel wie möglich in dem untersten Segment der Kugel koncentriert werden. Die theoretische Grenze erreicht man, wenn die ganze Masse $q\,E$ der Kugel in einem einzigen Punkte auf der Oberfläche koncentriert wird. Dieser Punkt

ist dann selbst der Schwerpunkt der Kugel. Wenn $R$ der Radius ist, rückt folglich das effektive Trägheitscentrum zu dem Abstande $\frac{2}{3}R$ von dem Mittelpunkte (29), während dieser Abstand bei den von uns verwendeten Kugeln nur etwa $\frac{2}{5}$ betrug. Dieser Abstand kann also theoretisch in dem Verhältnisse $\frac{5}{3}$ vergröfsert werden.

Der Einflufs auf die Schwingungsdauer läfst sich auch berechnen. In dem idealen Falle wird die Kugel wie ein Pendel schwingen, welches zwei träge Massen hat. Die eine ist die Masse $q\,E$, welche sich in dem Abstande $\frac{1}{3}R$ von dem Umdrehungspunkte befindet. Die andere ist die fiktive Masse $\frac{1}{2}q\,E$ im Mittelpunkte der Kugel, welche den Abstand $\frac{2}{3}R$ von dem Umdrehungspunkte hat. Dieses giebt ein effektives Trägheitsmoment gleich $\frac{1}{3}q\,E\,R^2$. Die wirkenden Kräfte sind der Auftrieb, welcher im Mittelpunkte, und das Gewicht, welches im Schwerpunkte angreift. Der Abstand dieser Angriffspunkte ist $R$, und der Betrag jeder Kraft $q\,E\,g$. Danach berechnet sich die Schwingungsdauer zu

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{3\,g}}.$$

Wenn die Kugel, wie in unseren Versuchen, einen Radius gleich 3,4 cm hat, so giebt diese Formel die Schwingungsdauer 0,21, welches etwa $\frac{5}{9}$ der in unseren Versuchen vorgekommenen Schwingungsdauer 0,38 ist.

Die Kräfte werden deshalb durch verbesserte Massenverteilung etwa $(\frac{5}{3}\cdot\frac{9}{5})^2$ oder neunmal stärkere Intensität als in unseren Versuchen erhalten können. Natürlich kann man in der Praxis die Grenze selbst nicht erreichen. Es wird aber keine Schwierigkeit haben, Kugeln von bedeutend gröfserer Effektivität zu konstruieren als diejenigen, mit welchen die oben beschriebenen Versuche ausgeführt worden sind.

**39. Die Wechselwirkung einer pulsierenden und einer oscillierenden Kugel.** — Einige abschliefsende Versuche verdienen zuletzt noch erwähnt zu werden, die wir mit denselben Kugeln anstellen können, welche wir teils zum Auf- und Niedertauchen an der Wasserfläche, teils zu Pendelschwingungen unter dem Wasser benutzt haben. Die Theorie fordert nämlich auch Wechselwirkungen zwischen einem pulsierenden und einem oscillierenden Körper, und wir können diese Wechselwirkungen prüfen, indem wir wieder die auf- und niedertauchende Kugel als ein Bild einer pulsierenden

betrachten. Wir verkleinern das Gewicht der einen Kugel um etwa die Hälfte; sie hat dann die Schwingungsdauer 0,37 (**22**), welche bei der kleinen Anzahl der in Frage kommenden Schläge hinlänglich genau mit der Schwingungsdauer 0,38 der pendelförmig schwingenden Kugel übereinstimmt. Die leichtere Kugel hängen wir etwas über die Wasserfläche, und die schwerere stellen wir auf Pendelschwingungen gerade unter der Wasserfläche ein, und treffen eine Anordnung, so daſs bei dem Losschlagen beide ihre Bewegungen gleichzeitig anfangen. Die Versuche geben dann die folgenden Resultate.

Wenn die pendelförmig schwingende Kugel longitudinal im Verhältnis zu der auf- und niedertauchenden oscilliert, so tritt Anziehung in dem durch Figur 6a, und Abstoſsung in dem durch Figur 6b angegebenen Falle ein, ganz in Übereinstimmung mit der Theorie. Man sieht auch leicht, daſs man es mit Kräften ähnlicher Gröſsenordnungen zu thun hat, wie diejenigen, welche in den Versuchen mit zwei fallenden Kugeln, oder mit zwei oscillierenden thätig waren. Sonst kommt der Versuch aber an Schönheit und Präcision den früheren nicht gleich. Von den verschiedenen leicht ersichtlichen Ursachen heben wir nur eine hervor: da die eine Kugel an, und die andere unter der Oberfläche schwingen muſs, so können sie nicht in gleiches Niveau gebracht werden, und deshalb kommt nicht die ganze Kraft, sondern nur eine Komponente derselben zur Wirksamkeit.

Am ungünstigsten machen sich die störenden Umstände jedoch geltend, wenn die oscillierende Kugel transversal in Bezug auf die auf- und niedertauchende schwingt. In diesem Falle ist eine Drehung der oscillierenden Kugel zu erwarten (Figur 6c). Eine solche tritt auch ein, aber nicht selten in der verkehrten Richtung. Wahrscheinlich haben wir es dabei mit Störungen zu thun, die von den Wellen herrühren, welche die auf- und niedertauchende Kugel erzeugt.

Wenn wir von diesem letzten Falle absehen, so ist es uns also gelungen, die ganze Reihe von Fernwirkungserscheinungen permanenter Natur nachzuweisen, deren Auftreten zwischen pulsierenden und oscillierenden Körpern die Theorie vorausgesagt hat. Alles ist in der einfachen Weise geschehen, daſs wir freie Eigenschwingungen von Kugeln um bewegliche Gleichgewichtslagen benutzt haben. Diese Versuche haben ihr groſses Interesse vor allem wegen ihrer Einfachheit. So vollkommen sind sie dagegen nicht, daſs sie Versuche mit gröſseren instrumentellen Mitteln überflüssig machen. Vor allem

ist natürlich hervorzuheben, dafs die auf- und niedertauchende Kugel nur ein unvollkommenes Bild einer pulsierenden Kugel ist. Aber auch die Oscillationsversuche brauchen Ergänzung. Wenn die Kugeln wie bisher ganz unbeschränkte Bewegungsfreiheit haben, so können auf einmal mehrere Bewegungen eintreten, wie es vor allem bei den Drehungsversuchen der Fall war (33). Die wirkenden Kräfte können dann nicht in allen Einzelheiten analysiert werden, weil die eine Wirkung die andere mehr oder weniger überdeckt. Es ist deshalb jedenfalls wünschenswert, die Versuche in der Weise anstellen zu können, dafs der Körper, welcher die Kräfte erleidet, in jedem Falle nur eine ganz bestimmte Bewegungsfreiheit hat, so dafs man jede wirkende Kraft, Komponente für Komponente, untersuchen kann. Weiter wird es auch wünschenswert sein, die Versuche unter solchen Umständen zu wiederholen, wo man die Mittel hat, Schwingungsdauern, Amplituden und Phasen von aufsen her zu regulieren. Alles dieses kann man erreichen, wenn man Instrumente konstruiert, wo die Pulsationen oder die Oscillationen den betreffenden Körpern von aufsen her mitgeteilt werden.

## Dritter Abschnitt.

### Generatoren für Pulsationen und Oscillationen.

**40. Die Aufgabe des Generators.** — So ermunternd auch die Versuche mit den fallenden Kugeln waren, so betrachtete sie C. A. Bjerknes doch nicht als definitiv befriedigende Verifikation des Gesetzes von den pulsierenden Kugeln. Er fing deshalb schon im Sommer und Herbst 1875 an zu versuchen, wirklich pulsierende Körper darzustellen durch Einblasen und Aussaugen von Luft in Gummiballons oder in Säcke, welche aus Öltuch genäht waren.

Einen rechten Erfolg hatten diese Versuche jedoch nicht, und zwar aus dem Grunde, dafs die Luft nur mit der Lunge ein- und ausgeblasen wurde. Allerdings erreicht man in dieser Weise vollkommen genügende Pulsationsintensitäten, wie eine einfache Überschlagsrechnung sofort zeigt. Denn gewöhnliche kräftige Lungen können drei bis vier Liter Luft ausatmen und wieder einsaugen. Dies würde eine Pulsationsamplitude von 1500 bis 2000 $cm^3$ geben. Verlangt man, dafs das Atmen sehr schnell vor sich gehen soll, so nimmt die Amplitude ab, und noch mehr, wenn zugleich Wider-

stände, wie die Reibung in den Schläuchen und die Spannung in den Membranen, überwunden werden soll. Immerhin kann man doch leicht, wenn die Umstände nicht zu ungünstig sind, ein Luftquantum von 400 $cm^3$ zweimal in der Sekunde ausblasen und wieder einsaugen. Wird diese Luftmasse auf zwei Körper verteilt, so erhält jeder eine Pulsationsamplitude von 100 $cm^3$. Ist die Schwingungszahl 2 in der Sekunde, so wird nach der Regel **13** (A) die Pulsationsintensität jedes Körpers etwa 886 $\frac{cm^3}{sec}$. Die zwei Körper werden dann, wie man mit Hilfe der Formel **17** (a) leicht ausrechnet, einander in einem Abstande von 8 cm mit einer Kraft von etwa 980 Dynen oder einem Gramm anziehen. Im doppelten Abstande wird die Kraft ein viertel Gramm betragen, und so weiter.

Man erreicht also Kräfte solcher Intensität, daſs sie unter sonst günstigen Umständen sehr leicht nachweisbar sein werden. Die Schwierigkeit ist aber, daſs man nicht diejenige Regelmäſsigkeit des Betriebes erhält, welche notwendig ist, damit nicht viel zu starke störende Kräfte auftreten. Die Schwingungsdauer und die Phase kann man einigermaſsen nach einem Metronome regulieren. Was man nicht regulieren kann, ist aber die Amplitude, und der mit den wechselnden Amplituden folgende veränderliche Auftrieb genügte, um die primitiven Versuche ganz wertlos zu machen.

Als deshalb Bjerknes später in Verbindung mit Professor Schiötz die Versuche in dem physikalischen Institute der Universität aufnahm, muſste es notwendigerweise ihre erste Aufgabe sein, einen vollkommeneren Generator für die Pulsationen zu konstruieren. Dieses ist im Prinzipe sehr einfach. Ein Kolben, welcher sich in einem Cylinder hin- und herbewegt, wird einen hin- und hergehenden Luftstrom erzeugen, durch den man den Pulsationskörper abwechselnd vergröſsern und verkleinern kann. Der Generator wird also eine Pumpe einfachster Art, ohne alle Ventile sein. Um es möglich zu machen, die wichtigsten Pulsationsversuche anzustellen, braucht man weiter nur der Pumpe zwei Stiefel zu geben, welche isochrone Luftströme bilden, und passende Anordnungen zu treffen, um auf verschiedene Amplituden und verschiedene Phasenunterschiede einstellen zu können.

Nach der Konstruktion eines solchen Generators war das Gelingen der Versuche mit der Anziehung und Abstoſsung der pulsierenden Körper gegeben. Es zeigte sich aber bald, daſs dadurch gleichzeitig viel mehr erreicht worden war. Denn der alternierende Luftstrom kann auch für die Erzeugung von Oscillationen verwendet

werden, und der Generator kam deshalb bald mehr und mehr auch für die Oscillationsversuche in Anwendung.

Wegen der grofsen Rolle, welche der Generator gespielt hat, ist er vielfach umkonstruiert und verbessert worden. Unten werden Generatoren von zwei Formen beschrieben. Der erste ist in C. A. Bjerknes' hydrodynamischem Laboratorium im Jahre 1881 konstruiert, und ist seither durchgehend — zum Teil mit Modifikationen in den Einzelheiten — bei allen gewöhnlichen Versuchen qualitativer Natur verwendet worden. Der andere wurde mit Rücksicht auf quantitative Versuche vor einem Jahre im mechanischen Institut der Universität Stockholm gebaut.

**41. Erste Form, für qualitative Versuche bestimmt.** — Ein Generator nach dem ersten Konstruktionsprinzip ist in Figur 15a abgebildet. Ein gröfseres eisernes Schwungrad von etwa einem halben Meter Durchmesser wird mit der Hand gedreht, und eine Schnur überträgt die Bewegung auf die Spindel $S$. Um es möglich zu machen, weit verschiedene Geschwindigkeiten zu erreichen, ist das Schwungrad mit zwei, die Spindel mit drei Schnurläufen versehen. Die Spindel, welche Figur 15c in gröfserem Mafsstabe im Schnitte zeigt, trägt zwei Kurbeln, welche die Kolben zweier kleiner Pumpencylinder $P$ und $P'$ in Bewegung setzen.

Ein Horizontalschnitt durch einen der Pumpencylinder ist in Figur 15b gezeigt. Im Innern desselben bewegt sich ein Kolben $K$, welcher, wie schon hervorgehoben, keine Ventile hat. Der Cylinder ist an beiden Enden geschlossen, und somit doppelwirkend. Wenn die Luft aus der einen Ausflufsröhre $R_1$ ausgetrieben wird, wird sie durch die andere $R_2$ eingesaugt, und umgekehrt. In dieser Weise sind die zwei entgegengesetzten Phasen immer zur Verfügung. Um hinlänglich leicht beweglich zu sein, haben Kolben und Kolbenstange keine Packung, sondern werden nur gut geschmiert.

Die Spindel ist, wie der Schnitt Figur 15c zeigt, geteilt, so dafs der eine Teil auf dem Zapfen $Z$ des anderen gedreht werden kann. Durch diese Drehung kann man den Winkel zwischen die zwei Kurbeln nach Belieben variieren. Dadurch erhält man den gewünschten Phasenunterschied zwischen den Luftströmen, welche die zwei Pumpen geben. Mit Hilfe der Schraubenmutter $M$ werden die zwei Teile der Spindel in der gewählten Lage fest aneinander geklemmt. An jedem Ende aufserhalb der zwei Zapfenlager trägt die Spindel eine Scheibe, in welcher eine prismatische Rinne ausgefeilt ist. Hier kann ein prismatisches Stück $p$ gleiten, welches

die Kurbel trägt. Durch Verschieben des Prismas kann man die Excentricität der Kurbel innerhalb gewisser Grenzen nach Belieben

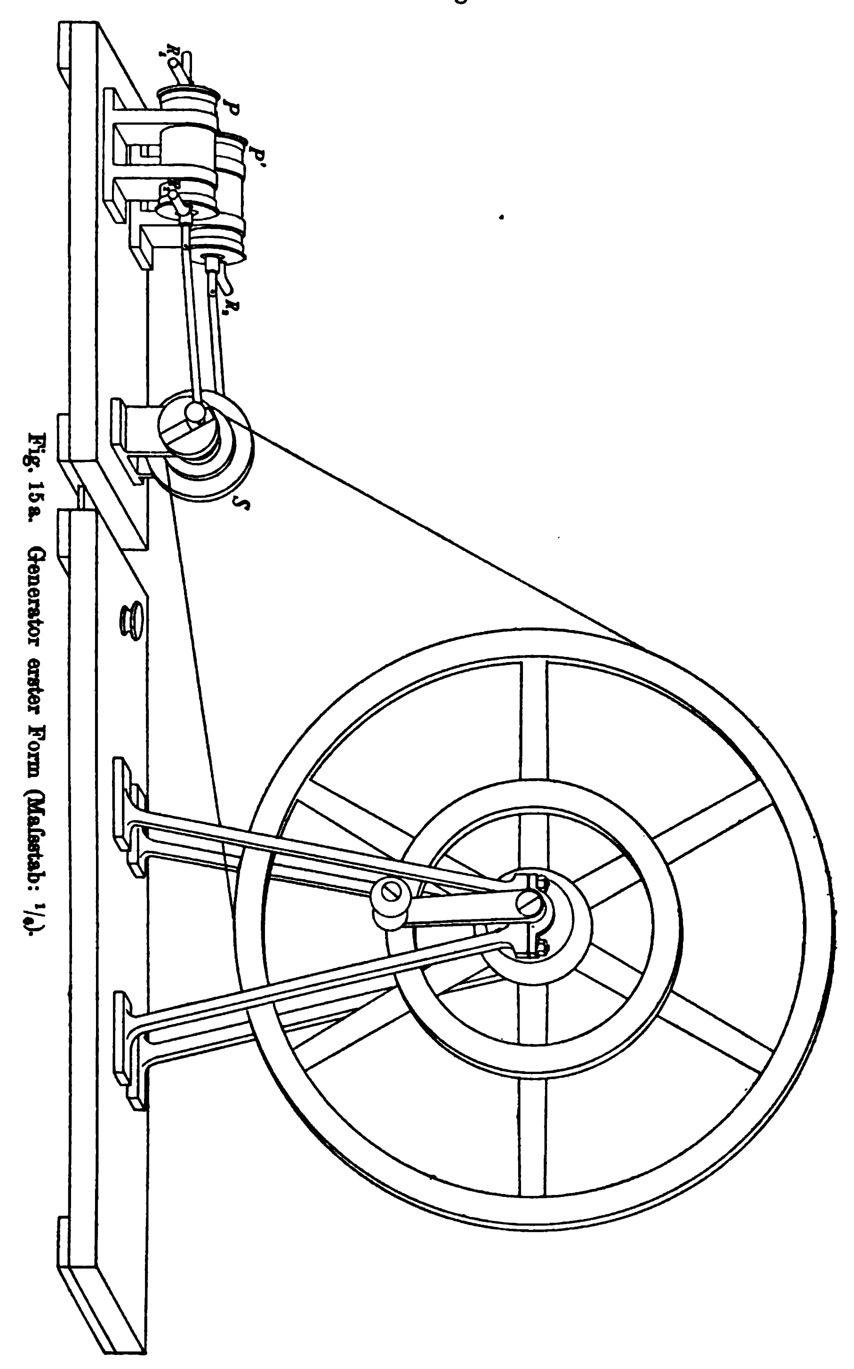



Fig. 15a. Generator erster Form (Maſsstab: 1/6).

verändern. Central durch die Kurbel geht eine Schraube, durch deren Zuschrauben das Prisma in der Rinne festgeklemmt wird. Diese Schraube verhindert zugleich die Stange, welche zu der Kolbenstange führt, von der Kurbel loszuspringen.

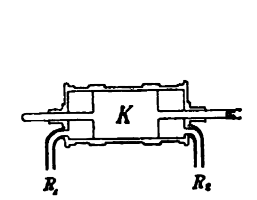




Fig. 15b. Pumpe im Schnitt.

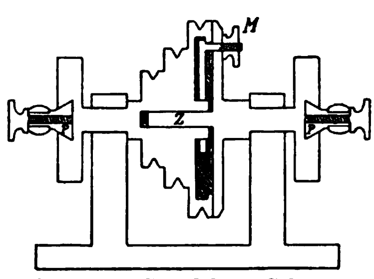



Fig. 15c. Spindel im Schnitt (Maſsstab: $^1/_3$).

Der Durchmesser des Kolbens ist 3,6 cm und sein Flächeninhalt beträgt, den Querschnitt der Stange abgerechnet, sehr angenähert 10 $cm^2$, so daſs jeder Millimeter Excentricität der Kurbel 1 $cm^3$ Pulsationsamplitude giebt. Die gröſste Excentricität, auf welche die Kurbel eingestellt werden kann, beträgt 1,5 cm, und das gröſste Luftvolumen, welches eine der kleinen Pumpen ausblasen und wieder einsaugen kann, wird 30 $cm^3$. Dieses giebt eine Pulsationsamplitude von 15 $cm^3$. Meistens wird jedoch mit bedeutend kleineren Amplituden, wie etwa 4 bis 8 $cm^3$ gearbeitet, was 4 bis 8 mm Excentricität der Kurbeln entspricht. Durch Umlegen der Schnur, und durch verschieden schnelle Drehung kann man die Anzahl der Schläge von weniger als einem bis zu mehr als fünfzig in der Sekunde verändern. Bei der gröſsten Amplitude erreicht man jedoch nicht bequem höhere Schwingungszahlen als zwanzig. Dieses giebt aber Pulsationsintensitäten von weniger als 66 bis zu mehr als 1330 $\frac{cm^3}{sec}$. Durchschnittlich sind diese nicht gröſser als diejenigen, welche man schon mit der Lunge erreichen kann. Der Vorteil liegt aber in dem regelmäſsigeren Betriebe, und zugleich darin, daſs im allgemeinen fremde Störungen weniger hervortreten, wenn man mit kleinen Amplituden, und mit entsprechend groſsen Schwingungszahlen arbeitet.

Es sei zuletzt noch erwähnt, daſs anstatt der gewöhnlichen Metallpumpen $P$ und $P'$ auch vielfach kleine, mit Kautschukmembranen geschlossene Trommeln benutzt worden sind. Solche Trommeln sind auf Figur 16a und b unten abgebildet. Etwas komplicierter werden diese Trommeln, wenn man sie doppelwirkend

machen will. Sie haben vor dem Metallcylinder den Vorteil, luftdicht zu sein, und bei gewissen Versuchen kann dieses eine wichtige

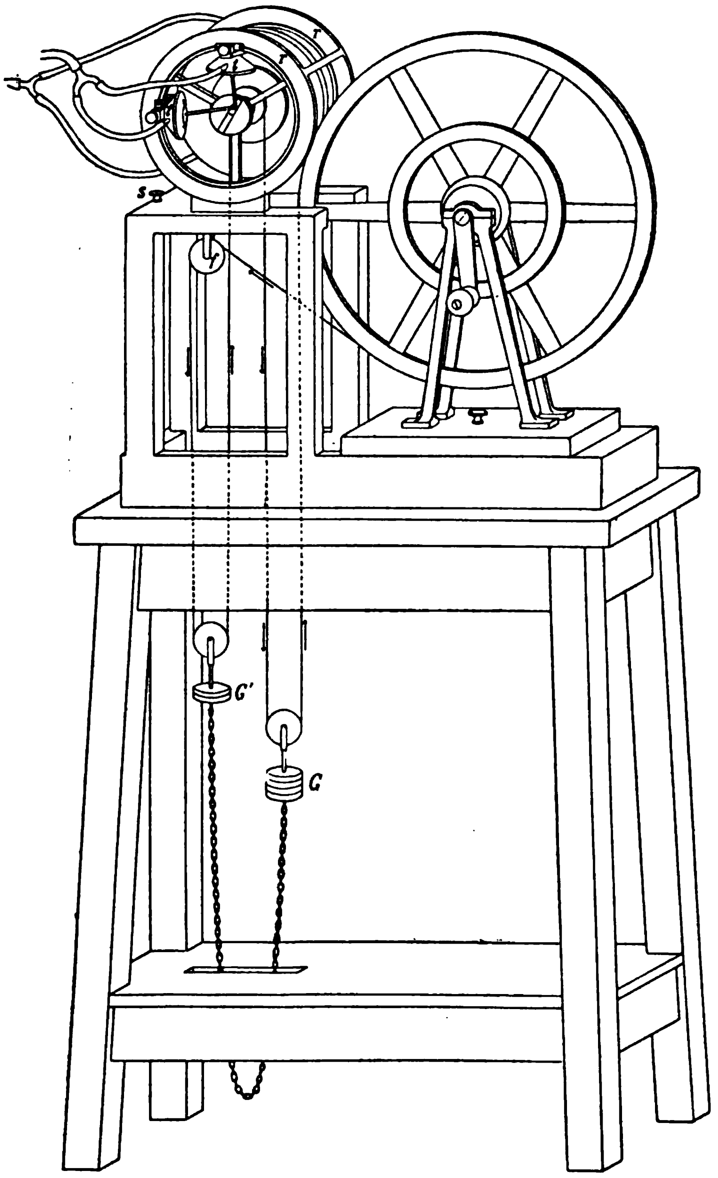



Fig. 16a. Generator, zweite Form (Maßstab: $^1/_{10}$).

Rolle spielen. Meistens ist aber ein geringer Verlust an Luft bedeutungslos, und die Metallpumpen haben den Vorteil, immer für

den Gebrauch fertig zu sein, während die Kautschukmembranen trocknen, und von Zeit zu Zeit erneuert werden müssen.

**42. Zweite Form, für quantitative Versuche bestimmt.** — Bei dem beschriebenen Generator hat man den Übelstand, den Versuch unterbrechen zu müssen, wenn die Amplituden oder der Phasenunterschied verändert werden sollen. Bei der Anstellung vieler Versuche, besonders messender Natur, ist es aber von grofser Bedeutung, diese Veränderungen ohne jede Unterbrechung des Versuches vornehmen zu können. Schliefslich ist es bei messenden Versuchen auch notwendig, die Geschwindigkeit und damit die Schwingungszahl konstant zu halten.

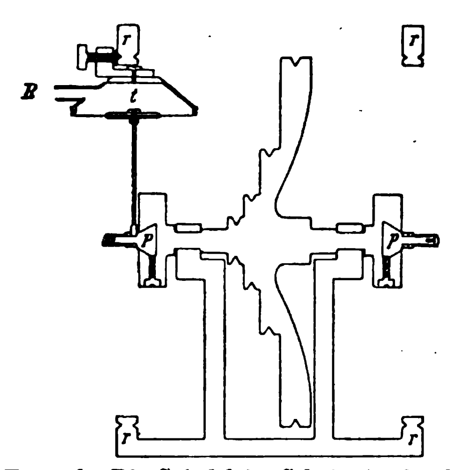


Fig. 16b. Die Spindel im Schnitt (Mafsstab: $^1/_4$).

Alle diese Anforderungen erfüllt in recht befriedigender Weise das in Figur 16a und b abgebildete Instrument. Als Pumpen dienen hier kleine trichterförmige Trommeln *t*, *t* mit Kautschukmembranen. Auf der Membran ist eine Metallscheibe festgeschraubt, welche mit der Kurbelstange verbunden ist. Diesen Trommeln ist der Vorzug vor Metallpumpen zu geben, teils weil man sie sehr leicht genügend luftdicht erhält, und teils weil sie sich mit ihren kleineren Dimensionen besser in die Konstruktion einfügen. Die Spindel, welche Figur 16b im Schnitte zeigt, ist nicht geteilt, und der Winkelabstand zwischen den zwei Kurbeln ist immer gleich Null. Jede Kurbel kann auf einmal mehrere Trommeln treiben, die auf einem der zwei Ringe *r*, *r* sitzen, und jede Trommel kann auf

ihrem Ringe verschoben werden, selbst wenn das Instrument im Gange ist, ohne daſs dadurch der Betrieb beeinfluſst wird. Durch diese Verschiebung der Trommeln ist man im stande, je nach Belieben, entweder nur die Amplitude und nicht die Phase, oder nur die Phase und nicht die Amplitude der erzeugten Luftströme zu verändern.

Die Phasenverschiebung erzielt man einfach durch Veränderung des Winkelabstandes zwischen zwei Trommeln. Hat man auf jedem Ringe nur eine Trommel, läſst die eine in Ruhe, und verschiebt die andere um den ganzen Ring herum, so werden alle Phasenunterschiede stetig durchlaufen.

Wenn man dagegen nur die Amplitude und nicht die Phase verändern will, so läſst man die Luftströme, welche von zwei Trommeln auf denselben Ring kommen, sich zu einem Luftstrom vereinen. Die sich vereinenden Luftströme haben genau gleiche Amplituden, aber verschiedene Phasen. Nach dem Prinzipe von der Zusammensetzung schwingender Bewegungen findet man die Amplitude und die Phase des resultierenden Luftstromes. Haben die zwei einzelnen Luftströme die Phasen $\varphi_1$ und $\varphi_2$ und die gemeinschaftliche Amplitude $A_0$, so wird die Phase $\varphi$ und die Amplitude $A$ des resultierenden Luftstromes:

$$\varphi = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}, \qquad A = A_0 \cos \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}.$$

Die Amplitude $A_0$ der einzelnen Luftströme kann man in derselben Weise wie bei dem vorigen Instrumente, nämlich durch Verschiebung der Kurbel, verändern. Nur ist die Vorrichtung für das Festklemmen des gleitenden Prismas $p$, wie aus der Figur 14b ersichtlich, eine andere, weil es nicht vorteilhaft ist, die lange und dünne Kurbel zu durchbohren.

Um den notwendigen konstanten Betrieb zu erhalten, ist die bekannte HUYGHENS'sche Vorrichtung für konstante Triebkraft zwischen Schwungrad und Spindel eingeschaltet. Das Schwungrad hebt also ein Gewicht $G$; von diesem geht die Schnur über einen der Schnurläufe der Spindel zu dem kleineren Gegengewicht $G'$, und von diesem über eine kleine Hilfsschnurscheibe $f$ zu dem Schwungrade zurück. Dreht man das Schwungrad so, daſs sich beide Gewichte in der Luft halten, und so, daſs sie keine gröſsere Beschleunigung haben, so wird die Spindel von der konstanten Gewichtsdifferenz $G - G'$ getrieben.

Diese konstante Triebkraft genügt, um konstante Geschwindigkeit zu sichern, in allen Fällen, wo während des Versuches der Widerstand konstant ist. Dieses ist bei vielen, aber lange nicht bei allen unten beschriebenen messenden Versuchen der Fall. Denn oft verhält es sich so, daſs die veränderten Einstellungen, die man während des Versuches zwecks der Messung machen muſs, einen veränderten Widerstand zur Folge haben. Man muſs dann eine entsprechende stetig regulierbare Triebkraft einsetzen können. Dieses erreicht man leicht in der Weise, daſs man an die Gewichte eine passend schwere Kette anhängt. Dreht man dann etwas stärker, so daſs sich das Gewicht $G$ etwas hebt, und das Gewicht $G'$ etwas senkt, so wird das erstere Gewicht einen gröſseren, das letztere einen kleineren Teil des Gewichtes der Kette als früher tragen, und man erhält gröſsere Triebkraft. Gerade umgekehrt geht es, wenn man langsamer dreht, so daſs sich das Gewicht $G'$ hebt, und das Gewicht $G$ senkt. Um aber diese Regulierung der Triebkraft anwenden zu können, muſs man zugleich einen hinlänglich empfindlichen Geschwindigkeitsindikator haben. Ein solcher wird gleich unten beschrieben werden.

Über die Dimensionen des Instrumentes sei angeführt, daſs das Schwungrad dasselbe ist, wie bei dem früher beschriebenen Generator. Die Spindel hat einen Durchmesser von 20 cm, und ist ziemlich schwer, um groſse Schwungkraft zu haben. Das letztere ist notwendig, weil der Widerstand während eines Umlaufes wegen der Spannung der Membranen stark veränderlich ist. Die Membranen sind 0,5 bis 1 mm dick und mäſsig gespannt. Die Spindel hat vier Schnurläufe, deren jeder halb so groſsen Durchmesser wie der nächst gröſsere hat. Wenn man die Schnur von einem Schnurlauf zu einem anderen umlegt, sind nur sehr kleine Verschiebungen des Schwungrades und der Schnurscheibe $f$ notwendig. Die letztere wird in ihrer Lage durch die Schraube $s$ festgeklemmt. Die Ringe $r, r$ sind sowohl miteinander, wie mit den zwei Zapfenlagern der Spindel fest verbunden. Innerhalb diesen starren Systems sind folglich alle Spannungen ausgeglichen, wodurch das Instrument einen sehr ruhigen Gang ohne Erschütterungen erhält.

Der Durchmesser der Membran jeder Trommel ist 6 cm, und der Durchmesser der auf der Membran befestigten Scheibe ist 3 cm. Wenn die Kurbel sich bewegt, bildet die Membran angenähert die Mantelfläche eines Kegels, und mit der Scheibe zusammen begrenzt sie die Oberfläche eines geraden abgestumpften Kegels, dessen gröſste Höhe gleich der Excentricität der Kurbel ist. Ist diese

Excentricität $l$, so berechnet man das Volumen des abgestumpften Kegels zu

$$A = 16{,}5\, l. \qquad \text{(a)}$$

Bei gröfseren Amplituden weicht die Membran immer mehr von der Kegelform ab, und zwar in der Weise, dafs (a) ein etwas zu grofses Volumen giebt. Angenähert kann man aber $A$ als die Pulsationsamplitude eines mit der Trommel verbundenen Pulsationskörpers ansehen, vorausgesetzt, dafs die Transmission ohne Verluste vor sich geht. Solche Verluste hat man jedoch immer, da die ganze Luftmasse etwas zusammengedrückt und ausgedehnt wird, und da aufser dem eigentlichen Pulsationskörper auch die Zuleitungsschläuche dem Drucke etwas nachgeben. Wenn gröfsere Drucke vorkommen, ist zugleich zu bemerken, dafs sich die Membran der Trommel biegt, so dafs die Rechnung unter der Voraussetzung der Form eines abgestumpften Kegels ganz illusorisch wird.

Die Bedingung dafür, dafs man die Pulsationsamplituden nach der Formel (a) schätzen kann, wird also offenbar die, dafs die Amplituden klein sind, und dafs der Pulsationskörper viel schwächere Membran als die Trommel hat, und zwar so schwach, dafs keine merkbaren Kompressionen der eingeschlossenen Luftmasse, oder Volumänderungen der Schläuche in Frage kommen. Schliefslich darf der Betrieb nicht so schnell sein, dafs aus dynamischen Gründen gröfsere Druckänderungen in der eingeschlossenen Luftmasse aufkommen. Welche Pulsationsamplituden man unter solchen Umständen zu erwarten hat, läfst sich überhaupt nicht mehr durch Überlegungen statischer Natur beurteilen.

**43. Der Geschwindigkeitsindikator.** — Einen empfindlichen Indikator für die Geschwindigkeit des Generators kann man leicht in der folgenden Weise zusammenstellen. Von einer Trommel des Generators leitet man einen Schlauch zu einer ähnlichen Trommel $T$, welche dann eine Stahlfeder $F$ in Schwingungen zu versetzen sucht. Die Stahlfeder kann aber nur mit einer bestimmten Periode schwingen, die man nach Belieben durch Verschieben eines Gewichtes $G$ verändern kann. Solange die Schläge der Trommel nicht mit den Eigenschwingungen der Feder übereinstimmen, macht die Feder nur kleine, fast unmerkbare Zuckungen. In demselben Augenblicke aber, wo die Übereinstimmung eintritt, kommt sie durch Resonanz in starke Schwingungen. Mit einiger Übung lernt man bald das Schwungrad des Generators so zu drehen, dafs sich die angehängte

Kette passend hebt und senkt, und die Feder immer mit der maximalen Amplitude schwingt.

Die Empfindlichkeit des Indikators kann man innerhalb recht weiter Grenzen nach Belieben variieren. Wenn man an die Feder eine Scheibe aus Karton befestigt, so dafs starke Dämpfung durch den Luftwiderstand hinzukommt, wird die Resonanz weniger scharf. In diesem Falle mufs man gröfsere Schläge der Trommel

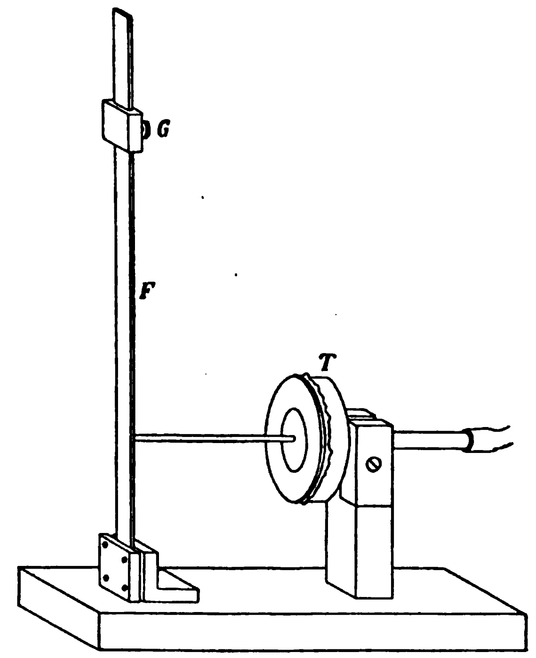



Fig. 17. Geschwindigkeitsindikator (Mafsstab: 1/3).

anwenden, und die Ausschläge der Feder verändern sich stetiger in der Nähe des Resonanzpunktes. Ein deutliches Maximum wird aber jedenfalls zu beobachten sein, solange die Dämpfung nicht zu grofse Werte erreicht. Andererseits erhält man die schärfste Resonanz, wenn man alle Ursachen der Dämpfung möglichst beseitigt. Dabei hat man nicht nur an die Luftdämpfung zu denken, sondern vor allem an die Dämpfung durch das Nachgeben der Unterlage. Das Untergestell mufs daher möglichst solid und starr gemacht werden, so dafs kein Nachgeben in dem Befestigungspunkte der Feder vorkommt, und das ganze Instrument mufs auf einer sehr soliden Unterlage befestigt werden. Hat man in dieser Weise möglichst kleine Dämpfung erreicht, so darf die Trommel nur mit sehr

kleinen Schlägen arbeiten, weil sonst die Feder bei der Resonanz zerbricht. In diesem Falle erhält man sehr scharfe Indikationen selbst der kleinsten Abweichungen des Generators von der erwünschten konstanten Geschwindigkeit.

Die Ausnutzung der Empfindlichkeit des Indikators bis zum äufsersten zeigte sich bei den messenden Versuchen nie notwendig, weil andere Fehler als die kleinen Änderungen in der Geschwindigkeit des Generators gröfseren Einflufs ausübten. Es genügte, die Schwingungszahl auf ein bis zwei Prozent konstant zu halten, und entsprechend stark gedämpfte Schwingungen der Resonatorfeder zu benutzen.

**44. Über andere Konstruktionsprinzipien für Generatoren.** — Der beschriebene Geschwindigkeitsindikator enthält andererseits auch ein Konstruktionsprinzip, welches für den Bau von Generatoren verwertet werden kann. Die Feder kann man in bekannter Weise durch eine elektromagnetische Vorrichtung in Schwingungen halten, und eine oder mehrere Trommeln treiben lassen. Diese Konstruktion ist sehr zweckmäfsig, wenn man hohe Schwingungszahlen erreichen und gleichzeitig die Schwingungszahl sehr konstant erhalten will. Den beschriebenen, für messende Versuche bestimmten Generator kann ein solches Instrument aber doch nicht ersetzen. Denn bei Änderung des Widerstandes ändern sich die Amplituden in sehr empfindlicher Weise. Ein anderer Nachteil ist der, dafs man nur die zwei entgegengesetzten Phasen erhält, und keine stetige Änderung der Phasendifferenz vornehmen kann. Dennoch kann man auf diese Weise für beschränktere Zwecke vorzügliche Generatoren erhalten.

Wenn man das einfache alternierende Magnetfeld durch ein rotierendes ersetzt, und gleichzeitig eine runde Stahlfeder anstatt der flachen einführt, so wird man ohne Zweifel wieder einen hoch entwickelten Generator bauen können, welcher die wichtigsten Vorzüge aller beschriebenen Generatoren verbindet.

Es sei noch zuletzt erwähnt, dafs man auch einfachere Vorrichtungen zusammenstellen kann, welche den Dienst der Generatoren leisten, wenn man nicht die höchsten Anforderungen an die Schönheit und Präcision der Experimente stellt. Von solchen einfacheren Vorrichtungen sei nur eine erwähnt. Der unten beschriebene „Oscillator“ (Figur 27) ist ein reversibles Instrument. Durch einen alternierenden Luftstrom wird derselbe in Oscillationen versetzt. Wird er andererseits kräftig in der Hand geschüttelt, so

erzeugt er selbst einen solchen Strom, und zwar hält sich dabei die Amplitude ziemlich konstant, selbst wenn man unregelmäßsig schüttelt.

# Vierter Abschnitt.

## Pulsationsinstrumente.

**45. Der Pulsationskörper.** — Die mathematische Theorie ist unter der Voraussetzung ausgearbeitet, daſs die pulsierenden Körper Kugelform haben. Diese Beschränkung ist aber nur eingeführt, um ein in vollkommen expliciter Form mathematisch lösbares Problem zu erhalten. Es liegt kein Grund vor anzunehmen, daſs sich pulsierende Körper anderer Form wesentlich anders als die Kugel verhalten werden, vorausgesetzt, daſs man die Versuche in Abständen anstellt, welche groſs im Verhältnis zu den Dimensionen der Körper sind. Denn wenn ein Körper pulsiert, so wird er im groſsen und ganzen einen Radialstrom erzeugen, welcher an Intensität umgekehrt quadratisch abnimmt. Abweichungen, welche auf der Form des Körpers beruhen, werden sich nur in der Nähe der Grenzfläche stärker geltend machen können. Weiter wird ein solcher pulsierender Körper, ohne Rücksicht auf seine Form, nach dem Satze (2) beim gröſseren Volumen stärker, bei dem kleineren schwächer beschleunigt werden, und damit sind alle Bedingungen erfüllt, auf welchen nach der qualitativen Ableitung die Anziehungen und Abstoſsungen beruhten.

Diese Bemerkung ist wichtig, denn es ist in der Praxis mit recht groſsen Schwierigkeiten verbunden, Körper zu erhalten, welche Kugelform haben, und während der Ausdehnung und Zusammenziehung diese Form beibehalten, ohne zugleich andere Bewegungen anzunehmen. Ein aufgeblasener Gummiballon kann in der Luft gute Kugelform haben. Unter dem Wasser wird sie aber schon durch den Auftrieb deformiert. Ist nun der Ballon auf das Ende einer Röhre in der gewöhnlichen Weise festgebunden, so wird das Aufblasen nicht nur eine Vergröſserung des Volumens, sondern auch eine Entfernung des Mittelpunktes von dem Befestigungspunkte zur Folge haben. Bei dem periodischen Aufblasen und Zusammensaugen erhält man deshalb auſser der Pulsation zugleich eine Oscillation, welche selbständige Wirkungen in der Ferne zur Folge hat. Dazu

kommt noch, dafs bei etwas schnelleren Bewegungen der Ballon leicht sehr komplicierte Bewegungen annehmen kann, bei welchen sich, je nach der Frequenz der Pulsationsschläge, verschiedene Systeme von Knotenlinien auf der Membran ausbildet, ähnlich wie bei dem bekannten Versuch mit den Klangfiguren.

Wenn ein Gummiballon als Pulsationskörper angewendet wird, ist es deshalb jedenfalls vorteilhaft, denselben an zwei Stellen an die Zuleitungsröhre festzubinden (Figur 18a). Wenn diese Stellen möglichst genau diametral gegenüber einander gewählt werden, bleibt

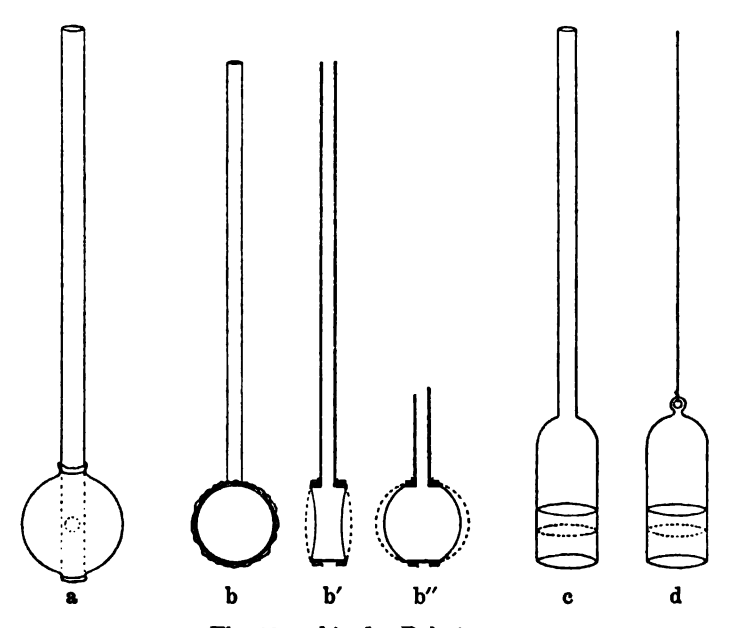



Fig. 18, a bis d. Pulsatoren.

der Mittelpunkt des Ballons während der Ausdehnungen und Zusammenziehungen in Ruhe, so dafs die Oscillationswirkung wegfällt. Auch treten nicht so leicht die komplicierteren Schwingungen mit Knotenlinien auf der Membran auf, obgleich man immer diese Möglichkeit im Auge behalten mufs, besonders wenn es sich um messende Versuche handelt. Meistens tritt aber eine einfache Bewegung ein, bei der die Membran die Form eines Umdrehungsellipsoides hat, welche um die Kugelform als Gleichgewichtsfigur Schwingungen ausführt. Und zwar hat dabei die Umdrehungsachse konstante Länge, während die äquatoriale Achse ihre Länge periodisch verändert.

Diese ellipsoidischen Schwingungen um die Kugelform lassen sich in zwei Partialbewegungen auflösen. Die eine ist die er-

wünschte gleichmäfsige Pulsationsbewegung, während die andere eine Deformationsbewegung bei konstantem Volumen ist. Der Einflufs jeder dieser Partialbewegungen läfst sich leicht sowohl qualitativ wie quantitativ untersuchen. Die Pulsationsbewegung giebt in der Flüssigkeit das erwünschte gleichmäfsige Radialfeld, dessen Intensität umgekehrt quadratisch abnimmt. Die Deformationsbewegung giebt das im ersten Bande (64) S. 89—90 behandelte Feld, dessen Intensität umgekehrt wie die vierte Potenz des Abstandes abnimmt. In gröfseren Abständen kann man deshalb ganz von diesem Felde absehen, und den ellipsoidisch schwingenden Pulsationskörper einfach als eine pulsierende Kugel betrachten. Auch stöfst man auf keine Schwierigkeiten, wenn man die auf diesen Deformationsschwingungen beruhende Kraft berechnen, und als Korrektionsglied der auf den Pulsationen beruhende Kraft zweiten Grades beifügen will.

Bei den unten zu beschreibenden messenden Versuchen sind Pulsatoren von der eben beschriebenen Form benutzt worden. Sonst sind meistens andere Formen in Anwendung gekommen, wo der Pulsationskörper die Form einer cylindrischen Trommel gehabt hat (Figur 18b und b′). Hier ist an der Zuleitungsröhre ein cylindrischer Ring festgelötet, und über die Endflächen des Ringes sind Kautschukmembranen gespannt. Die Membranen können ein paar Zehntelmillimeter Dicke haben und werden mit schwacher Spannung aufgesetzt, so dafs sie in der Gleichgewichtslage eben sind. In dem Schnitte Figur 18b′ sind die Lagen der Membranen während der Schwingungen veranschaulicht. Die sicherste und immer brauchbare Befestigungsmethode für die Membranen ist das einfache Festbinden mittels eines Fadens. Zu dem Zwecke ist an jedem Rande der ringförmigen Mantelfläche des Pulsationskörpers eine Rinne eingedreht. Hat man sich für Membranen einer ganz bestimmten Dicke entschieden, so kann man sie auch mit Hilfe von Ringen passender Gröfse aufdrücken.

Wenn man einen Generator mit luftdichten Pumpen anwendet, so kann man auch einen passenden Überdruck in der eingeschlossenen Luftmasse haben, und wieder Schwingungen erhalten, welche man als ellipsoidische Schwingungen um die Kugelform als Gleichgewichtsfigur auffassen kann (Figur 18b″). Dabei begegnet man aber oft der Schwierigkeit, dafs sich die zwei Membranen verschieden stark ausdehnen. Die zuerst beschriebene Form (a) ist daher meistens vorzuziehen.

Es hat zuletzt noch Interesse, zu erwähnen, dafs während der

ältesten Versuche auch als Pulsationskörper vielfach umgestülpte Glasglocken mit der unter ihr eingeschlossenen Luftmasse angewendet wurden. Die Glocke konnte dann entweder eine Zuleitungsröhre haben (Figur 18c), oder auch ganz geschlossen sein (Figur 18d). In dem letzteren Falle wurde die eingeschlossene Luftmasse in der Weise in Pulsationen gebracht, daſs der Druck im Wasser periodisch vergröſsert und verkleinert wurde.

Daſs der Pulsationsversuch, soweit es sich durch qualitative Beobachtungen feststellen läſst, mit so verschiedenen Pulsationskörpern genau denselben Verlauf hat, bildet den besten Beleg dafür, daſs die zufällige Form dieser Körper und ebenfalls die Art und Weise, wie die Pulsationen erzeugt werden, nur eine untergeordnete Rolle spielen.

**46. Pendelförmiges Pulsationsinstrument.** — Ein Instrument, wo der Pulsationskörper mit der Pumpe kommuniciert und doch hinlängliche Beweglichkeit besitzt, um der Wirkung der hydrodynamischen Fernkräfte nachzugeben, kann nun in mehrfacher Weise konstruiert werden. Das einfachste ist die pendelförmige Aufhängung der Pulsationskörper, und diese Anordnung wurde bei den ältesten Versuchen durchgehend benutzt.

Der erste Versuch, welcher Erfolg hatte, sei hier sofort erwähnt, weil er sich von allen späteren in einem wichtigen Punkte unterscheidet. Zwei umgestülpte Glasglocken, wie die in Figur 18d abgebildeten (7 cm Höhe, 2,5 cm Durchmesser) wurden an Drähte von etwa 45 cm Länge in einem hohen Glascylinder von 60 cm Höhe und 15 cm Durchmesser aufgehängt. Der Glascylinder wurde vollständig mit Wasser gefüllt, und mit einem Deckel wasserdicht geschlossen. Durch den Deckel ging eine Röhre, welche mit dem Pumpenstiefel eines Generators in Verbindung stand. Die Pumpe hatte Kolben mit Packung, und war mit Wasser gefüllt. Wenn der Generator in Gang gesetzt wurde, kamen die unter den Glocken eingeschlossenen Luftmassen wegen des periodisch wechselnden Druckes in Pulsationen, und die erwartete Anziehung trat ein.[1]

Dieser Versuch hat ein besonderes Interesse in Verbindung mit der Theorie, welche Herr Arthur Korn für die Gravitation aufgestellt hat (vergl. hierüber den Schluſsabschnitt des Buches). Ohne den beschriebenen Versuch zu kennen, der sonst nicht in Publi-

[1] Bjerknes und Schiötz, Videnskabsselskabets Forhandlinger, Christiania, 8. Mai 1878.

kationen erwähnt worden ist, hat auch Herr KORN einen Versuch ausgeführt, bei dem die Pulsationen durch den Druck des Wassers erzeugt wurden.

Die Abstofsung bei entgegengesetzten Pulsationen gelang es, durch die folgende Modifikation des Versuches nachzuweisen: Die eine Glocke wurde durch einen Körper ersetzt, der mittels einer Glasröhre, welche wasserdicht durch den Deckel passierte, mit der Pumpe in Verbindung stand. Dieser Körper wurde also durch Ein- und Auspumpen von Wasser in Pulsationen gebracht, und die unter die Glocke eingeschlossene Luftmasse nahm infolge des Druckes die entgegengesetzten Pulsationen an. Es trat dann Abstofsung ein.[1]

Bei den oben beschriebenen Versuchen wurde ein Generator angewendet, welcher nur einen einzigen Pumpenstiefel hatte. Nachdem etwas später ein Generator mit zwei Stiefeln konstruiert worden war, der sich wohl vielfach in den Einzelheiten, nicht aber im Prinzipe von dem in Figur 15 abgebildeten Instrumente unterschied, gelang auch der Versuch mit der Anziehung und Abstofsung pendelförmig aufgehängter Pulsatoren von der Form, welche durch Figur 15c veranschaulicht ist.[2] Dabei wurden also die Volumänderungen durch direktes Einblasen und Aussaugen von Luft durch die Zuleitungsröhre bewerkstelligt, und diese Anordnung ist bei den späteren Versuchen immer beibehalten worden.

Sehr grofse Empfindlichkeit erreicht man nie mit den pendelförmigen Pulsationsinstrumenten. Die Bedingung für die gröfste Empfindlichkeit ist nämlich die, dafs einander der Auftrieb und das Gewicht des Pendels das Gleichgewicht halten. Dieser Grenze darf man aber nie zu nahe kommen, denn wird sie auch nur im geringsten überschritten, so tritt instabiles Gleichgewicht ein. Aus dieser Ursache scheiterten die ersten primitiven Versuche (**40**), wo die Luft in pendelförmig aufgehängte Pulsationskörper mit dem Munde eingeblasen wurde. Denn hier mufste, wegen der Langsamkeit der Pulsationsschläge, das Gewicht gröfser als der Auftrieb bei dem gröfsten Volumen sein, und zwar wegen des unregelmäfsigen Betriebes erheblich gröfser. Bei den schnelleren Schlägen der vollkommeneren Generatoren hat man den Vorteil, dafs das Gewicht nur wenig gröfser als der mittlere Auftrieb zu sein braucht, und je

---

[1] BJERKNES und SCHIÖTZ, Videnskabsselskabets Forhandlinger, Christiania, 24. Mai 1878.

[2] BJERKNES und SCHIÖTZ, Videnskabsselskabets Forhandlinger, Christiania, 1. November 1878. — BJERKNES, Comptes rendus de l'Academie des Sciences, Paris, 10. Februar 1879, p. 280.

vollkommener der Generator wirkt, um so mehr darf man sich der Grenze nähern. Den Übelstand, daſs die meistens erwünschte gröſsere Empfindlichkeit nur in der Nähe einer Stelle labilen Gleichgewichtes zu finden ist, wird man aber nicht los, und bei allen später gebauten Instrumenten sind deshalb andere Anordnungen benutzt worden.

**47. Über andere Konstruktionsprincipien.** — Bei dem pendelförmigen Instrumente findet die Bewegung des Pulsationskörpers in einem Kreise mit vertikaler Ebene statt. Wählt man dagegen solche Verbindungen, daſs die Bewegung in einer horizontalen Ebene stattfinden muſs, so ist die Wirkung der Schwere sofort eliminiert. Diese Bewegung in einer Horizontalebene kann man nun in mehrfacher Weise erreichen.

Das einfachste ist die Anbringung des Pulsationskörpers auf dem Arme einer Torsionswage, wo der Zuleitungsschlauch als Torsionsdraht dient. Gewisse mit dieser Konstruktion verbundene Übelstände entdeckt man jedoch sogleich. Der Pulsationskörper hat nämlich bei dieser Anordnung mehrere Bewegungsfreiheiten, und als Folge des wechselnden Auftriebes bei den Volumänderungen treten sowohl Vertikalschwankungen des horizontalen Armes, wie pendelnde Bewegungen des ganzen Systemes auf. Um diese Bewegungen zu verhindern, die jedoch bei höheren Schwingungszahlen von selbst aufhören, wurde bei den ersten Instrumenten dieser Art, welche 1879 im physikalischen Institute ausgeführt wurden, zugleich eine starre Führung mittels einer in einem Loche beweglichen Spitze hinzugefügt.[1]

Durch diese gemischte Konstruktion verliert man jedoch wesentliche Vorteile, die man hat, solange man jedes einzelne Konstruktionsprinzip in seiner Reinheit anwendet. Die beste Torsionswage bleibt in den meisten Fällen die reine, wo man keine starren Führungen hinzufügt, sondern die Vertikalschwankungen nur so weit als möglich durch die Massenverteilung zu verkleinern sucht, und im übrigen das Arbeiten bei Schwingungszahlen vermeidet, wo diese Vertikalschwankungen oder Pendelbewegungen eintreten. Andererseits kann man aber auch das Torsionswageprinzip ganz aufgeben und nur starre Führungen benutzen, wobei man freilich einen kleinen Verlust an Luft bei dem Übertritt des Luftstromes zu dem

[1] C. A. Bjerknes, Seances de la Société de Physique, Paris 1879, S. 189, und Journal de Physique, Band 9, 1880, p. 78.

beweglichen Teile des Instrumentes in Kauf nehmen mufs. Drei Instrumente, welche unter Festhaltung dieser Prinzipien gebaut sind, werden unten beschrieben, in der Ordnung, in der sie zur Ausführung gekommen sind. Die zwei ersten haben starre Führungen, und unterscheiden sich voneinander durch den Grad der Bewegungsfreiheit des beweglichen Instrumentteiles. Das dritte ist die reine Torsionswage, welche für messende Versuche benutzt worden ist.

**48. Pulsationswage auf zwei Spitzen.** — Das in Figur 19 abgebildete Instrument wurde 1881 in C. A. Bjerknes' hydrodynamischem Laboratorium konstruiert.

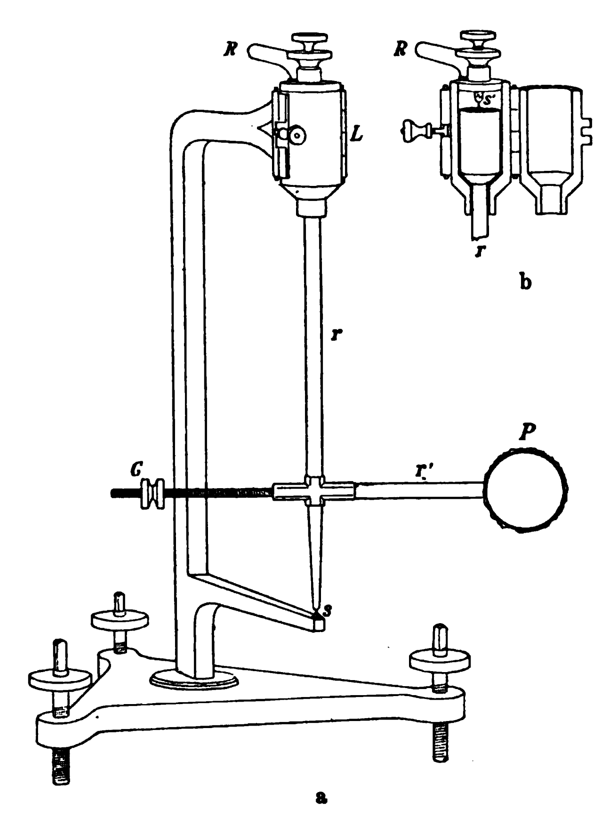



Fig. 19. Pulsationswage auf zwei Spitzen (Mafsstab: $^1/_3$).

Der Luftstrom von dem Generator wird hier durch die Röhre $R$ einem auf drei Stellschrauben ruhenden Stativ zugeführt. In dem oberen, geschlossenen Teil $L$ dieses Statives, der „Luftkammer“,

welche in Figur 19b geöffnet gezeigt ist, tritt der Luftstrom zu dem beweglichen Teil des Instrumentes, der eigentlichen Pulsationswage, über. Dieser berührt das Stativ nur mit zwei Spitzen, einer unteren *s*, welche auf einem Achat ruht, und einer oberen *s'*, welche in dem konischen Loch einer Schraube läuft. Diese Schraube hat ihren Kopf aufserhalb, ihre Spitze mit dem konischen Loch dagegen innerhalb der Luftkammer, und zwar genau in der Achse derselben. Sonst umschliefst die Luftkammer, wenn sie geschlossen ist, den oberen Teil der Pulsationswage möglichst dicht, ohne denselben zu berühren. Durch die kleine Öffnung geht immer etwas Luft verloren, aber die meiste geht durch die Röhren *r* und *r'* weiter zu dem Pulsationskörper *P*.

Mit Hilfe der Stellschrauben wird das Stativ so eingestellt, dafs die gerade Linie durch die zwei Spitzen möglichst genau vertikal steht. Ist dieses erreicht, so kann sich der Pulsationskörper nur in einem Kreis um eine vertikale Achse bewegen, und erleidet dabei keinen anderen Widerstand als die Reibung auf den zwei Spitzen. Da man aber diese vertikale Lage nie ganz genau trifft, so ist es wichtig, auch das Gewicht des Pulsationskörpers (d. h. sein scheinbares mittleres Gewicht, welches er während des Betriebes im Wasser zu haben scheint) durch das verschiebbare Gegengewicht *G* aufzuheben.

Dieses Instrument ist auch später mit modificierter Konstruktion verschiedener Einzelheiten ausgeführt worden, wodurch in gewissen Beziehungen praktische Vorteile gewonnen sind. So vereinfacht sich die mechanische Arbeit, wenn man auf die Öffnung der Luftkammer von der Seite verzichtet, und anstatt dessen einen Cylinder mit einem Loch für die Spitze von oben über die Pulsationswage überschiebt und diesen Cylinder an dem Stative festklemmt. Auch sind vielfach Konstruktionen angewendet worden, bei denen das Stativ mit dem Wassergefäfs fest verbunden war.

Bei ganz langsamen Pulsationsschlägen ist das Instrument nicht mehr brauchbar. Denn je langsamer die Schläge sind, um so mehr Luft geht in der Luftkammer verloren, und zuletzt erhält man keine Pulsationen mehr. Aus diesem Grunde sind einige Instrumente gebaut worden, wo der obere Teil der Pulsationswage die Form eines ringförmigen Gefäfses hat, in dem der erwähnte Cylinder von dem Stative heruntergeschoben wird. Füllt man dieses Gefäfs mit einer zähen Flüssigkeit, wie etwa Glycerin, so kann man sehr langsame Schläge anwenden, ohne Luft zu verlieren und ohne dafs die Flüssigkeit aus dem Gefäfse getrieben wird.

**49. Pulsationswage auf einer Spitze.** — Bei dem beschriebenen Instrumente bringt die streng begrenzte Bewegungsfreiheit den Vorteil, daſs die Vertikalschwankungen vollständig aufgehoben werden,

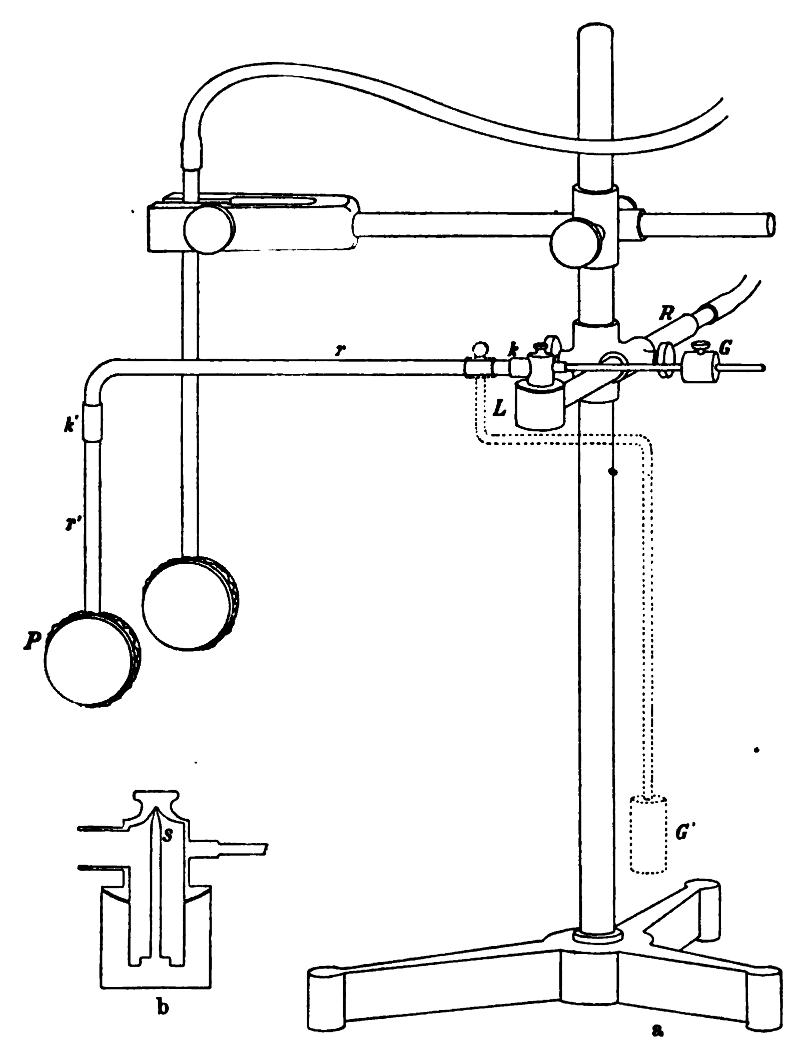



Fig. 20. Pulsationswage auf einer Spitze (Maſsstab: $^1/_8$).

aber andererseits den Nachteil, daſs man von sorgfältig vertikaler Einstellung der Umdrehungsachse abhängig wird, und diese Einstellung gelingt natürlich nie vollständig. Man kann aber auch Vorteil gegen Nachteil austauschen und der Pulsationswage erweiterte Bewegungsfreiheit geben, indem man sie nur auf einer

Spitze balancieren läfst. Dies ist an dem in Figur 20 abgebildeten Instrumente ausgeführt, welches 1895 im mechanischen Institute der Universität Stockholm gebaut wurde.

Es wird hier ein Stativ gewöhnlicher Form ohne Stellschrauben benutzt. Der Luftstrom vom Generator wird durch die Röhre *R* der Luftkammer *L* zugeführt, welcher in *b* im Schnitt gezeigt ist. Das Stativ trägt hier eine Stahlspitze *s*, auf der die Pulsationswage wie eine Kompafsnadel ruht. Um den Verlust an Luft so klein als möglich zu machen, ist die obere Fläche des Statives und die untere der Pulsationswage kugelförmig abgedreht, mit der Spitze als Centrum der Kugelflächen. Für diese Abdrehung kann man ein einfaches Spezialwerkzeug machen, und es gelingt leicht, den Abstand der Kugelflächen unter ein Zehntelmillimeter zu verkleinern. Von der Luftkammer geht die Luft weiter durch die Röhren *r* und *r'* zu dem Pulsationskörper *P*. Bei *k* kann man horizontale Röhren *r* verschiedener Länge und bei *k'* Pulsatoren verschiedener Form einführen und wieder wegnehmen.

Der Pulsationskörper hat bei dieser Anordnung zwei Bewegungsfreiheiten, eine vertikale, bei der die Schwere regulierend eingreift, und eine horizontale, bei welcher der Einflufs der Schwere eliminiert ist. Diese letztere Bewegungsfreiheit wird für den Nachweis der hydrodynamischen Fernkräfte verwertet. Die erstere ist dagegen gewissermafsen eine schädliche, und es ist vorteilhaft, dem Instrumente möglichst grofse Stabilität gegen die Vertikalbewegungen zu geben. Dieses geschieht in der Weise, dafs alle der Pulsationswage angehörenden Massen möglichst tief angebracht werden. Entweder giebt man deshalb dem Pulsationskörper *P* ein bedeutendes Gewicht, das man durch ein Gegengewicht *G* ausgleicht, was jedoch den Übelstand zur Folge hat, dafs man ein ziemlich grofses Trägheitsmoment um die vertikale Umdrehungsachse erhält. Oder man macht den Pulsationskörper *P* eben nur so schwer, dafs er im Wasser sinkt, nimmt das Gegengewicht *G* fort und führt ein möglichst tief und möglichst nahe an der Achse angebrachtes Gegengewicht *G'* ein.

Wie grofse Gewichte man aber auch zu Hilfe nimmt, so werden doch immer Vertikalschwankungen in dem Falle eintreten, wenn die Pulsationsperiode mit der Periode für die freien Pendelschwingungen übereinstimmt. Dies hat jedoch nur wenig zu bedeuten, denn meistens arbeitet man bei viel zu hohen Schwingungszahlen, um im geringsten dadurch beschwert zu werden. Wenn man deshalb nicht aus ganz speziellen Gründen die streng begrenzte Bewegungsfreiheit haben mufs, so ist dieses Instrument dem vorhergehenden vorzuziehen.

Der wichtigste Vorteil bleibt die vollständige Unabhängigkeit von allen Einstellungschwierigkeiten. Dazu kommt noch, daſs das Stativ auſserhalb des Gefäſses angebracht werden kann. Ins Wasser braucht nur der Pulsationskörper mit der angehörigen vertikalen Zuleitungsröhre $r'$ einzutauchen. Zuletzt kann man auch, wie die Figur zeigt, den feststehenden Pulsator an demselben Stative befestigen, der die Pulsationswage trägt.

Wenn man eine Pulsationswage dieser Form hinlänglich leicht baut, kann man die Anziehung und die Abstoſsung pulsierender Körper auch in der Luft anstatt im Wasser nachweisen.

**50. Torsionswage.** — In Bezug auf die Bewegungsfreiheit verhält sich die Torsionswage dem eben beschriebenen Instrumente ziemlich analog. Der Unterschied ist, daſs einerseits die horizontale Bewegung durch die Torsion des Schlauches reguliert wird und daſs andererseits das Instrument, wegen der Biegsamkeit des Schlauches, noch kompliciertere Vertikalschwankungen und Pendelbewegungen ausführen kann.

Eine zweckmäſsige Form des Instrumentes zeigt die Figur 21. Der Arm $A$ geht von einem Stative aus, welches dem in Figur 20 abgebildeten ähnlich ist, nur daſs es etwas gröſsere Höhe hat. Der von dem Generator kommende Schlauch wird an der Röhre $R$ befestigt, welche mit einer drehbaren und zum Zweck der Messungen geteilten Scheibe $S$ verbunden ist. An dem unteren Ende der Röhre $R$ ist der Torsionsschlauch $T$ befestigt, welcher aus weichem Gummi besteht, etwa 1 cm Durchmesser und je nach den Umständen 10 bis 30 cm Länge hat. In dem unteren Ende des Schlauches hängt der eigentliche bewegliche Instrumentteil, welcher dem entsprechenden Teil des vorhergehenden Instrumentes sehr ähnlich ist. Die Luft geht durch die Röhren $r$ und $r'$ zu dem Pulsationskörper, und bei $k$ und $k'$ kann man dieselben Ein- und Ausschaltungen machen. $G$ ist ein leichteres Gegengewicht und $G'$ ein schwereres, welches zu der Stabilisierung des Instrumentes dient. $z$ ist ein Zeiger, welcher gegen einen ähnlichen festen Zeiger eingestellt wird, wenn es sich um messende Versuche handelt.

Als qualitatives Instrument betrachtet hat diese Torsionswage einige Vorteile und einige Nachteile dem vorhergehenden Instrumente gegenüber. Daſs die horizontale Bewegung durch die Torsion des Schlauches reguliert wird, kann für die Empfindlichkeit nachteilig sein. Es ist aber auch mit einem sehr wesentlichen Vorteil verbunden, welcher später hervortreten wird. Bei Pulsationsschlägen

gewisser niedriger Perioden treten ähnliche, aber mehr zusammengesetzte pendelnde Bewegungen als bei dem vorigen Instrumente ein, und bei gewissen höheren Schwingungszahlen kann der Schlauch

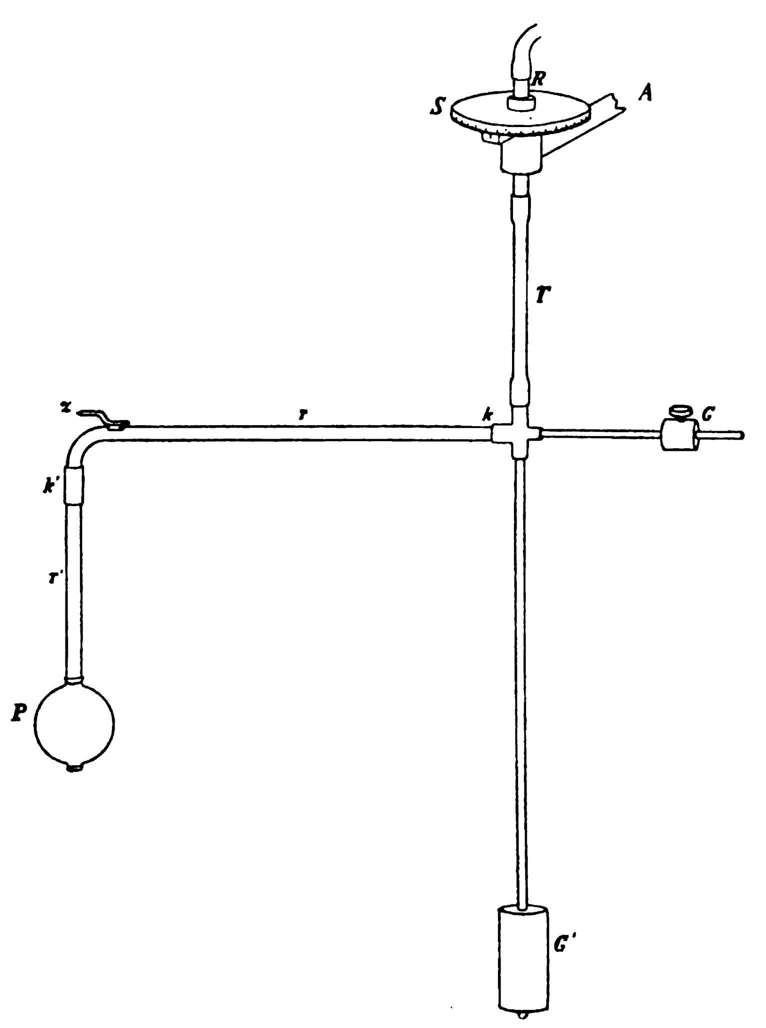



Fig. 21. Torsionswage (Maſsstab: $^1/_5$.)

in stehende Schwingungen kommen. Diese bestimmten Schwingungszahlen muſs man also vermeiden, ein wesentlicher Verlust ist das aber nicht.

Endlich ist die Torsionswage das einzige Pulsationsinstrument, mit dem man Messungen ausführen kann, und zu solchen Zwecken wurde das beschriebene Instrument vor einem Jahr im mechanischem

Institute der Universität Stockholm ausgeführt. Ein sehr gutes Mefsinstrument wird es natürlich nie werden können, schon wegen des grofsen elastischen Rückstandes in dem tordierten Gummischlauche. Wenn man aber mit hinlänglich kleinen Verdrehungen arbeitet, so wird diese Fehlerquelle nicht gröfser als die anderen, welchen man unvermeidlich begegnet. Für die Messungen ist es wichtig, dafs alle Schwingungen schnell gedämpft werden. Dazu kann man das Gewicht $G'$ mit Flügeln passender Gröfse versehen und dieselben in ein Gefäfs mit einer zähen Flüssigkeit wie Glycerin oder Öl bringen.

# Fünfter Abschnitt.

## Oscillationsinstrumente.

**51. Allgemeines über Oscillationsinstrumente.** — In einer Beziehung ist es bedeutend leichter, die Forderungen der Theorie bei den Oscillationsversuchen, als bei den Pulsationsversuchen zu erfüllen. Denn es hat keine Schwierigkeit, den Oscillationskörpern Kugelform zu geben. Im übrigen ist aber die Aufgabe der Konstruktion eines Oscillationsinstrumentes eine weit kompliciertere.

Die Aufgabe ist offenbar folgende: Es soll ein Mechanismus gebaut werden, welcher eine Kugel in erzwungene Oscillationen versetzen kann, während jedoch die Kugel eine freie Beweglichkeit beibehält, deren man sich für den Nachweis der hydrodynamischen Fernkraft bedienen kann. Dies mufs in solcher Weise geschehen, dafs man Gelegenheit hat, die Oscillationsversuche in allen denjenigen Hauptlagen anzustellen, welche durch das Schema Figur 7 angegeben sind. Eine Vereinfachung tritt insofern ein, als nur die eine der zwei Kugeln die freie Beweglichkeit zu haben braucht. Von der beweglichen mufs man aber verlangen, dafs sie bei der ersten Klasse von Versuchen ihre Beweglichkeit längs, bei der zweiten senkrecht zu ihrer Oscillationsachse haben soll, während in einer dritten die Oscillationsachse selbst frei drehbar sein mufs. Diese drei prinzipalen Arten der Beweglichkeit werden wir im folgenden kurz als die longitudinale, die transversale und die drehende Beweglichkeit bezeichnen.

Die Aufgabe, ein Instrument zu konstruieren, bei dem man die oscillierende Kugel nach Belieben auf jede dieser drei Beweglichkeiten einstellen kann, wurde nicht auf einmal gelöst. Es wurden

vielmehr nacheinander eine Reihe von Konstruktionsprinzipien versucht, welche einen immer umfassenderen Teil der Aufgabe erledigten. Ohne auf umständlichere Instrumentbeschreibungen einzugehen, werden wir diese Konstruktionsprinzipien kurz erwähnen, einerseits weil sie an sich immer noch in spezielleren Fällen ihre Vorteile haben können, und andererseits weil man dadurch den Weg verfolgen kann, welcher zu der Konstruktion der vollkommeneren Instrumente geführt hat.

**52. An Fäden befestigte Kugeln.** — Die ersten Oscillationsversuche wurden mit Kugeln gemacht, welche auf mäſsig gespannten Fäden befestigt waren. Die Oscillationsachse hatte dabei die Richtung des Fadens, während die mäſsige Spannung eine allerdings beschränkte *transversale* Beweglichkeit gestattete.

Der erste und einfachste Versuch wird durch die Figur 22 illustriert. Ein Faden ohne Ende passiert über zwei Schnurscheiben $S, S'$ und trägt zwei Kugeln. Wird die eine Rolle um einen kleinen Winkel hin- und hergedreht, so kommen die Kugeln in parallel-transversale Oscillationen *gegeneinander* und werden nach der Theorie eine abstoſsende Kraft aufeinander ausüben (Figur 7 d). Ein kleines Entfernen der Kugeln voneinander trat auch bei dem Versuche ein.[1]

Fig. 22.

Auch allgemeinere Versuche nach diesem Prinzipe wurden angestellt. Zwei Vorrichtungen, wie die in Figur 22 abgebildeten, wurden gemacht, nur daſs jede bloſs eine Kugel trug. Mit diesen konnte man auch die Anziehung zweier Kugeln, welche parallel-transversale Oscillationen *miteinander* ausführten, nachweisen (Figur 8c). Noch allgemeiner konnte man die vier Rollen in solcher Weise befestigen, daſs alle reinen Anziehungen oder Abstoſsungen nachgewiesen werden konnten, welche eintreten, wenn beide transversal, d. h. senkrecht zu der gemeinschaftlichen Verbindungslinie oscillieren, während sonst die Oscillationsachsen einen beliebigen Winkel miteinander bilden. Die Versuche gelangen nach Erwarten, und besonders zeigte sich auch die Neutralität bei den normal-transversalen Oscillationen (Figur 7g).[2] Die bei diesen Versuchen angewendeten

[1] Videnskabsselskabets Forhandlinger, Christiania, 6. April 1877. — O. E. Schiötz, Göttinger Nachrichten 1877, S. 304.

[2] Bjerknes und Schiötz, Videnskabsselskabets Forhandlinger, Christiania, 22. Februar 1878.

Kugeln hatten einen Durchmesser von etwa 2 cm, und die Verschiebungen, welche als Folge der Anziehung oder der Abstofsung eintraten, konnten in den günstigsten Fällen einige Millimeter erreichen.

**53. Oscillierender gleicharmiger Hebel.** — Bei der beschriebenen Anordnung geben sich also die Kräfte nur durch sehr kleine Bewegungen der Kugeln zu erkennen, und die Versuche beschränken sich auf den Fall der transversalen Beweglichkeit. Einen bedeutenden Fortschritt bezeichnet deshalb das durch Figur 23 veranschaulichte Konstruktionsprinzip.

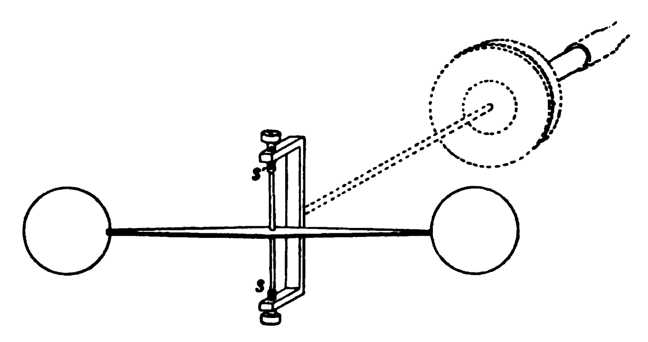



Fig. 23. Gleicharmiger Oscillationshebel.

Zwei gleiche Kugeln sind hier auf den Enden eines gleicharmigen horizontalen Hebels befestigt, welcher sich auf den zwei Spitzen $s$ und $s'$ um eine vertikale Achse drehen kann. Diese zwei Spitzen laufen in den konischen Löchern zweier Schrauben, welche in einer gabelförmigen Vorrichtung befestigt sind. Wird diese Gabel in oscillierende Bewegung gesetzt, etwa, wie auf der Figur angedeutet, mit Hilfe einer Trommel, welche mit dem Generator in Verbindung steht, so kommt der ganze Hebel mit seinen zwei Kugeln in Oscillationen und gleichzeitig hat der Hebel die Freiheit sich zu drehen, wenn eine der Kugeln von einer Kraft angegriffen wird.

Wenn die Oscillationen der Gabel senkrecht sind sowohl zu der Längsrichtung wie zu der Umdrehungsachse des Hebels, so hat jede Kugel longitudinale Beweglichkeit. Den Fall der transversalen Beweglichkeit kann man aufserdem in zweifacher Weise erhalten, indem man die Oscillationsrichtung der Gabel entweder senkrecht zu dem Hebel und längs seiner Achse, oder längs des Hebels und senkrecht zu der Achse gerichtet wählt. Wie man leicht sieht, kann man auch alle Übergangsfälle zwischen der longitudinalen und der

transversalen Beweglichkeit erhalten und deshalb mit Hilfe dieses Konstruktionsprinzipes überhaupt alle Kraftwirkungen linearer Natur untersuchen, welche eine oscillierende Kugel erleiden kann. Gleichzeitig können sich die Kräfte durch grofse deutliche Bewegungen der Kugeln zu erkennen geben.

Das erste Instrument, wo dieses Konstruktionsprinzip zur Verwendung kam, stellte Herr SVENDSEN aus Glas her.[1] Alles war äufserst leicht, die Kugeln hatten nur etwa 1 cm Durchmesser und die Länge des Hebels betrug 7 cm. Die Gabel, ebenso wie die feststehenden Oscillationskugeln wurden mit Siegellack an den Armen einer gröfseren elektromagnetisch getriebenen Stimmgabel befestigt. Bei diesem Betriebe gelangen die Versuche ohne jeden Vergleich schöner als jemals später mit gröfseren Instrumenten und anderen Betriebsmethoden. Bei der Anziehung im Falle longitudinaler Oscillation wiederholte sich beispielsweise das folgende Spiel mit einer wunderbaren Präcision: die bewegliche Kugel wurde angezogen und dann durch den vibratorischen Stofs heftig weggeschleudert. Sie entfernte sich dann, aber infolge der Anziehung mit rasch abnehmender Geschwindigkeit, bis die Anziehung wieder die Überhand bekam und eine neue Annäherung mit erneutem Stofs und Wegschleudern erfolgte u. s. w.

Bei dieser Betriebsmethode kann man aber nicht alle gegenseitigen Lagen zwischen der anziehenden und angezogenen Kugel erhalten. Es wurden deshalb später rein mechanische Betriebsmethoden eingeführt, indem die Gabel und ebenfalls die feststehenden Oscillationskugeln durch passende Zwischenglieder mit den Kurbeln einer rotierenden Welle in Verbindung gesetzt wurden. Als später der Generator eine höhere Entwickelung erreicht hatte, wurde durchgehend die pneumatische Betriebsmethode, welche in der Figur 23 angedeutet ist, benutzt.

**54. Oscillierende Kugel in einem drehbaren Rahmen.** — Bei der beschriebenen Hebelvorrichtung hat die Oscillationsachse eine durch die äufseren Verbindungen bestimmte Richtung im Raume. Um den Fall der drehenden Beweglichkeit zu erhalten, mufste also wieder ein neues Prinzip gesucht werden. Zu diesem Zwecke wurde ein Rahmen (Fig. 24) konstruiert, der auf zwei Spitzen $s$ und $s'$ um eine vertikale Achse drehbar war. In diesem Rahmen konnte

[1] BJERKNES und SCHIÖTZ, Videnskabsselskabets Forhandlinger, Christiania, 7. und 21. Februar 1879.

eine horizontale Stange in zwei Löchern gleiten, und in der Mitte dieser Stange war die Kugel befestigt. Gleitet die Stange in den Löchern hin und zurück, so oscilliert die Kugel und die Oscillationsachse hat immer die Richtung der Stange. Dreht sich der Rahmen, so folgt die Stange, d. h. die Oscillationsachse, und zugleich die Kugel selbst mit.

Die gestellte Aufgabe wird nun gelöst sein, wenn man eine Methode findet, die Kugel in erzwungenen Oscillationen zu halten, ohne die freie Drehbarkeit des Rahmens zu beschränken. Dieses wurde bei den ersten Versuchen mit Hilfe zweier Fäden erreicht, welche in der Nähe der oberen Spitze *s′* von dem Gestell zu dem Rahmen übergingen und in der Weise über kleine Rollen geführt wurden, dafs der Zug in den Fäden Oscillationen der Kugel zur Folge hatte. Die Beweglichkeit des Rahmens blieb in dieser Weise allerdings etwas beschränkt, da bei der Drehung ein ähnliches Kräftepaar, wie bei der gewöhnlichen bifilaren Aufhängung, überwunden werden mufste. Der Versuch hatte aber doch Erfolg, und die Drehung trat deutlich ein, wenn das Instrument gut funktionierte.[1]

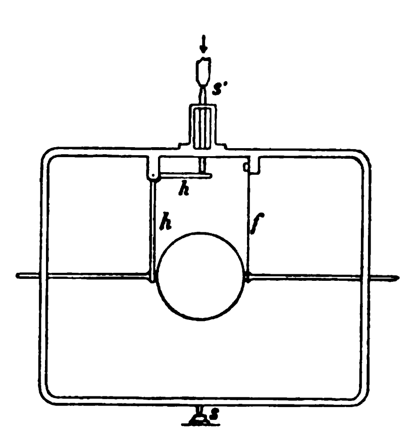


Fig. 24. Drehbarer Rahmen.

Bald nachher wurde die verbesserte Anordnung eingeführt, welche in der Figur 24 angegeben ist. Die obere Spitze wurde in vertikaler Richtung verschiebbar gemacht. Wenn sie heruntergedrückt wurde, wirkte sie auf einen rechtwinkligen Hebel *h*, welcher die Stange in Bewegung setzte. Dabei mufste die Spannkraft der Stahlfeder *f* überwunden werden. Wenn nachher der Druck auf die Spitze nachliefs, so wurden die Stange mit der Kugel, der Hebel und die Spitze von der Stahlfeder zurückgetrieben. Durch alternierenden Druck auf die obere Spitze wurde deshalb die Kugel in die erwünschten Oscillationen gebracht. Mit dieser Anordnung gelang der Versuch gut bei glücklicher Einstellung, so dafs der Druck auf den Spitzen nicht zu grofs und auch nicht die Bewegungen der Kugel zu schwach oder unregelmäfsig war.

[1] Bjerknes und Schiötz, Videnskabsselskabets Forhandlinger, Christiania, 4. April 1879.

Wenn das Instrument noch nicht vollkommen war, so war doch ein wichtiges Konstruktionsprinzip gefunden, welches gröfsere Allgemeinheit als die vorhergehenden hatte. Denn offenbar kann die Kugel auch in beliebiger Entfernung von der Umdrehungsachse angebracht werden, und das Instrument löst dann nicht nur die spezielle Aufgabe, welche sich auf die Drehung der Kugel bezieht, sondern auch die früher durch besondere Konstruktionsprinzipien gelösten Aufgaben, welche sich auf die Kraftwirkungen linearer Natur bezogen.

**55. Drehbarer Rahmen für sämtliche Oscillationsversuche.** — Nachdem das in Figur 19 abgebildete Pulsationsinstrument konstruiert worden war, hatte es keine Schwierigkeit, weitere Verbesserungen des Oscillationsinstrumentes mit dem drehbaren Rahmen zu erreichen. Zu dem Rahmen kann man nämlich die Triebkraft in derselben pneumatischen Weise wie zu der Pulsationswage überführen.

Figur 25 zeigt die neue Form des Rahmens. Derselbe kann an Stelle der Pulsationswage in dem Stativ, welches in Figur 19 abgebildet ist, eingesetzt werden und ist hier auf seinen zwei Spitzen *s* und *s′* leicht drehbar. Der obere cylindrische Teil pafst genau in die Luftkammer des Statives, wie der entsprechende Teil der Pulsationswage. Der Unterschied ist aber, dafs sich in diesem Cylinder ein Kolben *k* befindet, wie man es aus dem Schnitte *d* (Figur 25) sieht. *e* zeigt den Cylinder von oben. Der Kolben wird durch den alternierenden Luftstrom vom Generator auf- und niedergetrieben und diese Bewegung wird durch den rechtwinkligen Hebel *h* auf eine horizontale Stange übertragen. Zur Regulierung der Bewegung dient wieder eine Stahlfeder *f*. Die Stange *h* befindet sich noch über dem Wasserspiegel; an ihr ist aber ein starres Dreieck befestigt, welches unter das Wasser taucht. Dieses Dreieck hat noch nahe bei *B* Führung in einem Spalt, welcher in einem zu der Absteifung des Rahmens angebrachten horizontalen Streber ausgefeilt ist.

Wenn der Kolben von dem Luftstrom vom Generator getrieben wird, so schwingt der Punkt *B* geradlinig in der Ebene des Rahmens und symmetrisch um die Umdrehungsachse. Im Punkt *B* werden die Oscillationskugeln in verschiedener Weise befestigt, je nach der erwünschten Art der Beweglichkeit. Für den Nachweis der linearen Kraftwirkungen bedient man sich zweier Kugeln, welche an den Enden einer und derselben Stange befestigt sind, und der Mittel-

punkt dieser Stange wird bei *B* festgeschraubt. Wenn man diese Stange senkrecht zu der Ebene des Rahmens einstellt (Figur 25a), so werden die zwei Kugeln längs der Richtung oscillieren, längs

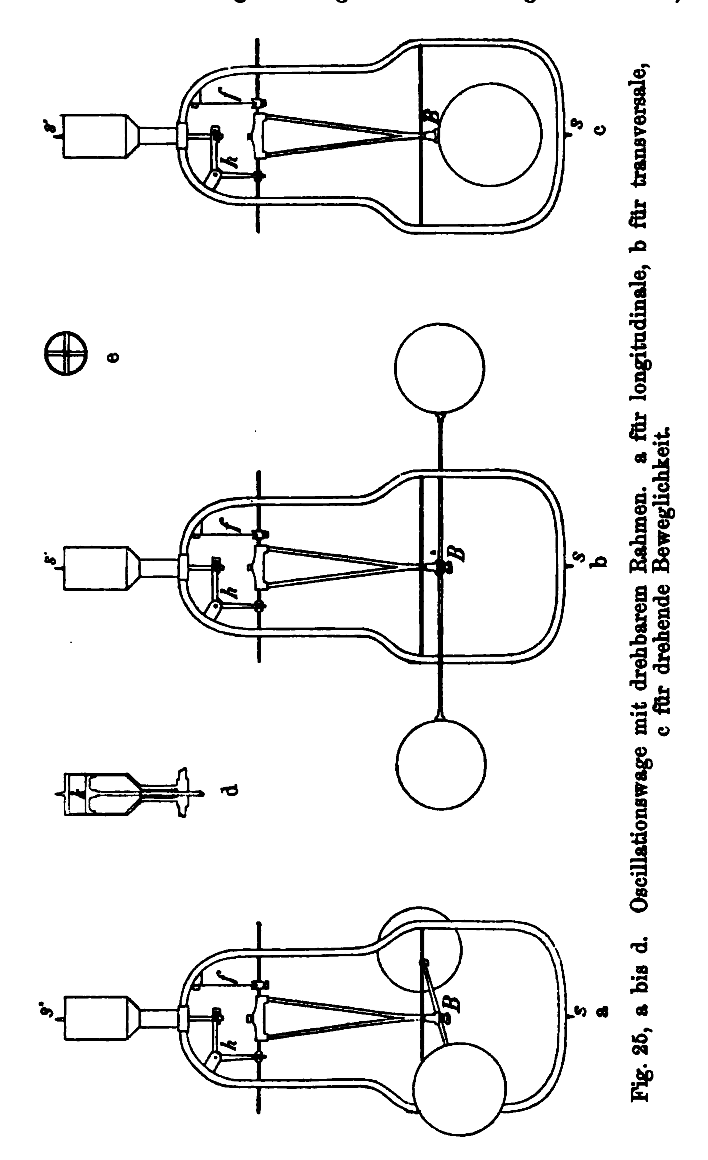



Fig. 25, a bis d. Oscillationswage mit drehbarem Rahmen. a für longitudinale, b für transversale, c für drehende Beweglichkeit.

welcher sie sich bei der Drehung des Rahmens um seine Achse bewegen. Die Kugeln haben dann die longitudinale Beweglichkeit. Dreht man aber die Stange, so dafs sie in die Ebene des Rahmens kommt, so werden die Kugeln, wie man sofort sieht, die transversale

Beweglichkeit erhalten (Figur 25b). Soll endlich eine Kugel die drehende Beweglichkeit haben, so nimmt man die Stange fort und schraubt bei *B* eine einzige Kugel fest (Figur 25c).

Zu dem Instrumente gehört noch der in Figur 26 abgebildete Oscillator. Bei demselben ist der ganze Mechanismus in eine Kapsel eingeschlossen, die man überall anfassen kann. Der eingeschlossene Mechanismus ist in der Figur gestrichelt, und man erkennt den Kolben *k*, den rechtwinkligen Hebel *h*, die Feder *f* und die gleitende Stange wieder. Die Kugel kann auf zwei verschiedene Weisen befestigt werden, entweder wie die voll ausgezogene Kugel auf der Stange selbst, oder wie die gestrichelte, an einer Verlängerung dieser Stange nach unten. Der Schlauch von dem Generator wird an der Zuleitungsröhre *R* befestigt. Das Instrument kann in der Hand geführt, oder an einem Stative befestigt werden, und dabei in jede beliebige Lage zu einer der oscillierenden Kugeln der Oscillationswage gebracht werden.

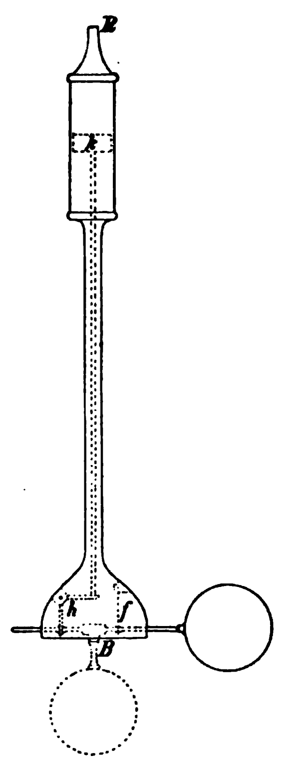


Fig. 26. Oscillator.

Die beschriebenen Oscillationsinstrumente sind später auch in verschieden modificierten Formen ausgeführt worden. Der wichtigste Unterschied ist, dafs sehr oft der Cylinder mit dem Metallkolben durch eine Trommel mit Kautschukmembran ersetzt worden ist, und zwar sowohl auf der Oscillationswage, wie auf dem Oscillator. Diese Trommel kann dann auch in der Weise angebracht werden, dass der rechtwinklige Hebel und die Feder überflüssig werden. Dadurch vereinfacht sich die mechanische Arbeit etwas; sonst ist aber für die Versuche bei dieser Veränderung nichts Wesentliches zu gewinnen, noch zu verlieren.

**56. Oscillator mit entgegengesetzt oscillierendem inneren Kern.** — Schliefslich mufs ein letztes Prinzip erwähnt werden, welches sowohl theoretisch wie praktisch wichtige Vorzüge hat.

In den theoretischen Entwickelungen des ersten Bandes ist mehrmals darauf hingewiesen worden, dafs eine Kugel durch rein innere Kräfte in Oscillation kommen kann. Wenn nämlich eine

Hohlkugel einen schweren inneren Kern hat, mit dem sie in elastischer Verbindung steht, so können Bewegungen eintreten, bei denen die Hohlkugel und der Kern entgegengesetzte Oscillationen um den gemeinschaftlichen Schwerpunkt ausführen.

Die Federkraft können wir nun durch die Kraft des alternierenden Luftstromes von dem Generator ersetzen. In der folgenden Weise gelangt man leicht zu dem Ziele. Man setzt die Kugel aus zwei Halbkugeln zusammen (Figur 27), deren jede eine Zuleitungsröhre hat. Die Halbkugeln trennt man voneinander durch eine Kautschukmembran $m$, auf welche der schwere Kern, ein Bleigewicht $B$, festgeschraubt ist. Die eine Zuleitungsröhre $r_1$ verbindet man mittels eines kurzen Gummischlauches $g$ mit einer Röhre $r$, durch welchen der Luftstrom von dem Generator kommt. Die ganze Kugel mit ihren Röhren hängt dann wie ein Pendel mit dem Aufhängungspunkt bei $g$. Wenn nun der Generator in Bewegung gesetzt wird, so muſs der Bleikern in der Kugel oscillieren; und da der Schwerpunkt des ganzen Systemes in Ruhe bleiben muſs, so kommt notwendig die Kugel selbst in entgegengesetzte Oscillationen.

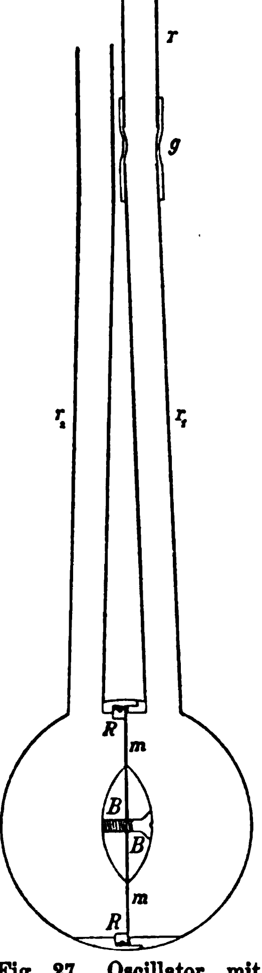


Fig. 27. Oscillator mit entgegengesetzt oscillierendem innerem Kern (Maſsstab: $^1/_2$).

Einen praktischen Vorteil hat dieser Oscillator schon darin, daſs die Oscillationsachse eine ganz bestimmte Lage in der Kugel hat, so daſs die zwei Halbkugeln immer entgegengesetzten Polen entsprechen. Man kann deshalb den Halbkugeln verschiedene Farben geben, und dieses erleichtert sehr den Überblick bei den Versuchen. Noch wichtiger ist aber, daſs die Spannungen und Gegenspannungen schon innerhalb der Kugel ausgeglichen sind. Oscillatoren dieser Form kann man deshalb ganz wie Pulsatoren behandeln. Einen kann man an der Zuleitungsröhre mit der Hand führen oder in einem Stative einklemmen, und einen anderen in verschiedener Weise beweglich anbringen.

**57. Pulsations- und Oscillationsinstrumente für sämtliche Versuche.** — Ein einfaches Oscillationsinstrument erhält man, wenn

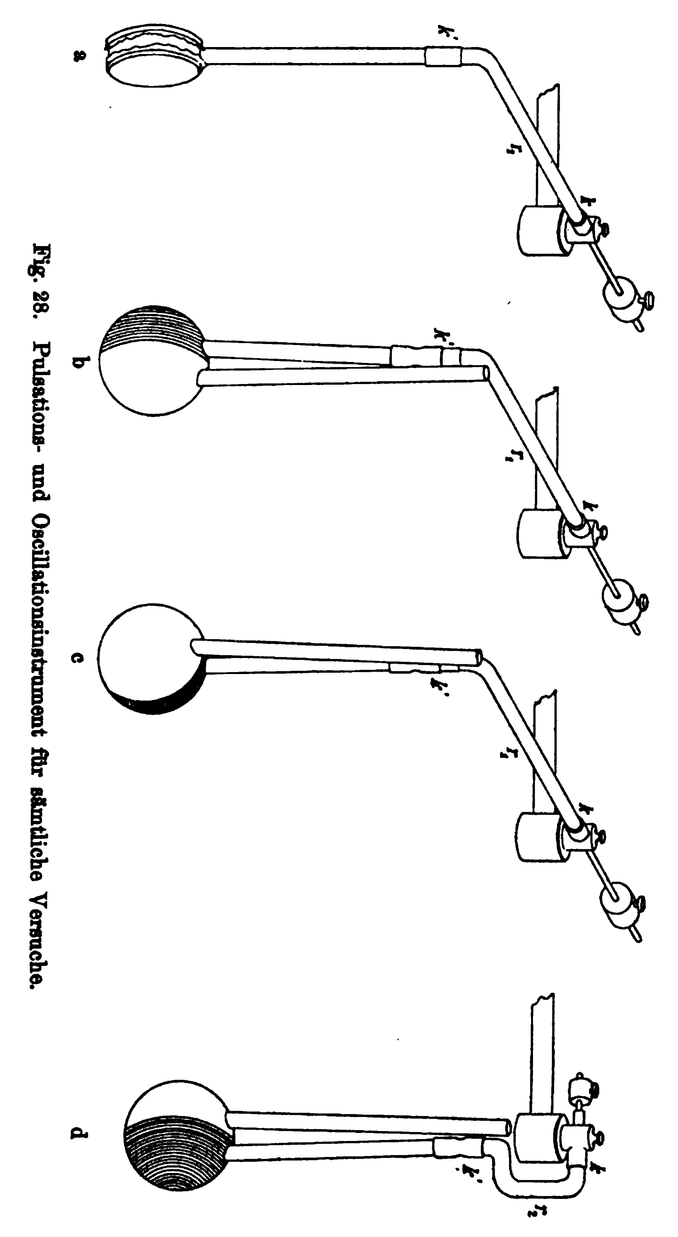


Fig. 28. Pulsations- und Oscillationsinstrument für sämtliche Versuche.

man den Oscillator, welcher beweglich sein soll, an einen hinlänglich langen und hinlänglich weichen Gummischlauch aufhängt. Das Instrument entspricht dann dem pendelförmigen Pulsations-

instrument (46). Die Pendelausschläge nach der Seite kann man verwerten, um die Anziehungen und Abstofsungen nachzuweisen, und die Tordierbarkeit des Schlauches kann man ausnutzen, um die Drehungsmomente zu untersuchen.

Weiter kann man bei dem Pulsationsinstrument in Figur 20 oder Figur 28a den Pulsator bei $k'$ wegnehmen, und anstatt dessen den Oscillator einführen. Dabei erhält man bei der Einstellung in Figur 28b die longitudinale, bei der Einstellung in Figur 28c die transversale Beweglichkeit. Schliefslich kann man, um die drehende Beweglichkeit zu erhalten, die horizontale Röhre $r_1$ wegnehmen, und durch die dreimal gebogene Röhre $r_2$ ersetzen, so dafs der Oscillator mit seiner Kugel vertikal unter den Umdrehungspunkt kommt. Bei den Anordnungen a, b und c ist es meistens zu empfehlen, noch das Gegengewicht $G'$ (Figur 20) als Sicherung gegen schädliche Schwankungen und Erschütterungen anzubringen.

Schliefslich kann man in ganz derselben Weise den Oscillator an der Torsionswage (Figur 21) einführen. Dadurch gewinnt man den Vorteil, auch messende Versuche ausführen zu können, was bei den früheren Oscillationsinstrumenten nicht möglich war.[1]

**58. Über die vorteilhafteste Konstruktion des Oscillators mit Kern.** — Bei guter Ausführung zeigen sich diese letzten Oscillationsinstrumente gegenüber den früher beschriebenen in den meisten Beziehungen weit überlegen. Bei der Ausführung ist aber vor allem ein Punkt hervorzuheben.

Eine der wichtigsten Bedingungen für schöne Versuche ist die, dafs man den gröfstmöglichen Nutzeffekt von dem Luftstrome des Generators erhält. Denn was man durch unzweckmäfsige Konstruktion an Amplitude verliert, läfst sich nicht durch Vergröfserung der Pumpenschläge wiedergewinnen, ohne dafs gleichzeitig starke schädliche Spannungen und Erschütterungen auftreten. Dieses ist eine Erfahrung, welche sich bei sämtlichen Instrumenten wiederholt.

Um nun möglichst grofsen Nutzeffekt von dem Luftstrome bei dem Oscillator mit innerem Kern zu haben, mufs der Kern möglichst schwer im Verhältnis zu der Kugel und den Zuleitungsröhren sein. Dies darf man aber nicht durch unbegrenzte Vergröfserung des Gewichtes des Kerns erreichen. Denn dadurch wird einerseits die Trägheit der Kugel unzweckmäfsig grofs, und andererseits erfolgt mit dem grofsen Gewichte zu starker Druck auf die Spitze. Die

[1] Die Instrumente nach den neuesten Angaben liefert Ferdinand Ernecke in Berlin.

Hauptsache ist es deshalb, die Kugel mit ihren Röhren so leicht wie möglich zu machen, um das erlaubte Gewicht so viel wie möglich in den Kern koncentrieren zu können.

Was die Ausführung betrifft, so wurden bei den ersten Versuchen Halbkugeln aus Messing benutzt, welche, wie die Figur 8 zeigt, zusammengeschraubt wurden. Das Bleigewicht hatte auf dem Stab, welcher zu dem Zusammenschrauben diente, Führung. Viel bessere Resultate sind aber erreicht, nachdem die Halbkugeln und die Röhren aus dünnem Celluloid gemacht worden sind. Den Halbkugeln giebt man Verstärkungen an den Rändern und dreht sie sorgfältig ab, so dafs sie möglichst wasserdicht ineinander geschoben werden können. Ein wenig Vaselin macht nötigenfalls völlig wasserdicht. Die Membran spannt man über einen losen Ring *R* (Figur 27), welcher zwischen die zwei Halbkugeln festgeklemmt wird. Da die Reibung nicht immer genügt, um die zwei Halbkugeln zusammen zu halten, kann man sie an ein paar Stellen durch einen mit Aceton angefeuchteten Celluloidstreifen verbinden, der dann beiden Kugeln fest anhaftet. Diesen Streifen schneidet man wieder weg, wenn man die Kugel öffnen will.

**59. Geschichtliches über die Entwickelung der Instrumente.** — Wir haben im vorhergehenden gewissermafsen die Entwickelungsgeschichte des Generators, des Pulsationsinstrumentes und des Oscillationsinstrumentes, eines jeden für sich, wiedergegeben. Sämtliche haben sich aber nebeneinander entwickelt, und man wird leicht die zusammengehörigen Entwickelungsstadien der verschiedenen Instrumente erkennen.

Aus den Arbeiten im physikalischen Institut der Universität Christiania, welche im Sommer 1880 abgeschlossen wurden, ging das folgende Instrumentarium hervor: Ein Generator, welcher sich nicht wesentlich im Prinzipe, wohl aber viel in den Einzelheiten von dem in Figur 15 wiedergegebenen unterschied; ein Pulsationsinstrument, welches Torsionsschlauch und zugleich Führung auf einer Spitze hatte (47), und schliefslich eine Reihe von Oscillationsinstrumenten mit pneumatischem Betriebe, mit gleicharmigem Hebel (Figur 23), für die linearen und drehbaren Rahmen (Figur 24), für die drehenden Kraftwirkungen. Die Konstruktionen rührten von Professor Schiötz und Herrn Svendsen her. Etwas ältere Formen dieser Instrumente wurden in Paris 1879[1], die verbesserten auf der skandinavischen

[1] C. A. Bjerknes, Séances de la Société Française de Physique 1879, S. 189. Journal de Physique Band 9, 1880, S. 78.

Naturforscher-Versammlung in Stockholm 1880[1] vorgezeigt. Die vollständigste Beschreibung hat C. A. Bjerknes 1880 in einem populären Aufsatze gegeben.[2]

Das erste Resultat der im Herbste 1880 angefangenen Arbeiten in C. A. Bjerknes' hydrodynamischem Laboratorium waren der Generator Figur 15, das Pulsationsinstrument Figur 19 und das Oscillationsinstrument Figur 25. Mit Instrumenten dieser Form wurden die Versuche in der elektrischen Ausstellung zu Paris 1881 vorgezeigt, und dadurch zum ersten Male einem gröſseren wissenschaftlichen Publikum bekannt. Beschreibungen der Instrumente und Versuche sind 1882 von C. A. Bjerknes selbst und vom Verfasser gegeben.[3]

Die neuesten Instrumente, nämlich der für messende Versuche bestimmte Generator Figur 16, die Pulsations- und Oscillationswagen auf einer Spitze Figur 28, und der Oscillator mit dem entgegengesetzt oscillierenden inneren Kern sind auch alle auf Ideen gebaut, welche schon in Bjerknes' hydrodynamischem Laboratorium geprüft waren. Eine höhere Entwickelung haben aber diese Instrumente erst in den späteren Jahren im mechanischen Institute der Universität Stockholm erreicht.

**60. Über einige verwandte Instrumente und Versuchsanordnungen.** — Es sei in diesem Zusammenhange noch auf einige Instrumente und Versuchsanordnungen hingewiesen, welche von anderen Forschern herrühren, aber mit den beschriebenen gröſsere oder geringere Ähnlichkeit haben.

Die von Guyot zuerst wahrgenommenen und später von Schellbach und Guthrie genauer untersuchten akustischen Anziehungen und Abstoſsungen schlieſsen sich denjenigen Versuchen an, welche wir unten als Versuche über hydrodynamische Fernkräfte temporärer Natur beschreiben werden (vergl. neunten Abschnitt). Von diesen älteren akustischen Versuchen haben sich aber seit 1875 diejenigen

---

[1] C. A. Bjerknes, Förhandlingar vid de skandinaviska Naturforskarnes tolfte möte, Stockholm 1880, S. 177.

[2] C. A. Bjerknes, Hydrodynamiske Analogier til de statisk elektriske og de magnetiske Kræfter. „Naturen“, Christiania 1880.

[3] C. A. Bjerknes, Hydrodynamische Erscheinungen, welche den elektrischen und magnetischen analog sind. „Lotos“ B. 3, 1882. Exner's Repertorium 1883, S. 283. V. Bjerknes, Nyere hydrodynamiske Undersögelsen, „Naturen“ 1882.

von DVOŘÁK entwickelt.[1] Diese zeichnen sich dadurch aus, dafs eine Resonanzwirkung als Zwischenglied auftritt. Das angezogene oder abgestofsene System hat erst durch Resonanz Eigenschwingungen erworben, und die Kräfte treten insofern als das Resultat der Wechselwirkungen zwischen zwei selbständig schwingenden Systemen auf. Wenn es sich dabei um Pulsations- und Oscillationswirkungen handelt, so gehören die Kräfte also der Klasse der permanenten hydrodynamischen Fernkräfte an, und die Instrumente sind mit denjenigen zusammenzustellen, welche wir oben beschrieben haben. Es ist auch unzweifelhaft, dafs man bei den DVOŘÁK'schen Versuchen vielfach mit Pulsations- und Oscillationswirkungen zu thun hat, und zwar Oscillationswirkungen im Falle der resonierenden Membranen, Pulsationswirkungen dagegen, wenn es sich um den an einem Ende oder an beiden Enden offenen Hohlresonator handelt. Man kann diesen Hohlresonator mit der als Pulsationskörper dienenden umgestülpten Glocke Figur 18d zusammenstellen. Denkt man sich zwei solcher Glocken in der Luft aufgehängt, und mit einer periodisch expandierenden und kontrahierenden Luftmasse gefüllt, so werden sie einander, genau wie im Wasser, je nach der Phase der Schwingungen anziehen oder abstofsen. Die eigentlichen Pulsationskörper sind dabei die expandierenden und kontrahierenden Luftmassen. Die Glocke, oder selbst ein an beiden Enden offener Resonator, mufs aber die Bewegung der verschobenen Luftmasse mitmachen, weil er als schwerer Körper die Stelle der intensivsten Bewegung suchen mufs.[2]

Andererseits macht sich bei den einseitig offenen Hohlresonatoren, deren sich DVOŘÁK vornehmlich bedient, zugleich eine Reaktionswirkung geltend, die er neuerdings auf ein regelmäfsiges Auswerfen von Wirbelringen aus dem Resonator zurückgeführt hat.[3] Die darauf beruhende Reaktionsbewegung der Resonatoren, welche zu der Konstruktion des bekannten akustischen Reaktionsrades geführt hat, haben nichts mehr mit Pulsations- und Oscillationswirkungen zu thun, sondern ist mit der Bildung von Strömen und cirkulierenden Bewegungen zusammenzustellen, die wir unten beschreiben werden

---

[1] DVOŘÁK, Ber. d. Wien. Akad., 72, II. Abt., S. 218, 1875; Pogg. Ann. 157, S. 42, 1876; Wied. Ann. 3, S. 328, 1878; Ber. d. Wien. Akad. 84, II. Abt., S. 702, 1881; Physikalische Zeitschrift 2, S. 490, 1901.

[2] Man vergleiche besonders den Versuch in Pogg. Ann. 157, S. 55 über die Anziehung zweier Resonatoren.

[3] Physikalische Zeitschrift l. c.

(**66**, **67**), und die wir bei den Erscheinungen, welche wir verfolgen, als Fehlerquellen betrachten, und möglichst zu beseitigen suchen.

Reine Pulsationswirkungen in der Luft hat andererseits A. Stroh 1882 in direktem Anschluſs an die Bjerknes'schen Versuche erhalten.[1] Seine Pulsationswage ruht auf einer Spitze und hat teilweise als Vorbild bei der Konstruktion des Instrumentes Figur 20 gedient.

Endlich hat Lebedew[2] 1896—97 im Anschluſs sowohl an Bjerknes wie an Dvořák die von Resonanzen abhängigen Anziehungs- und Abstoſsungserscheinungen untersucht. Im Wasser sind die Versuche mit oscillierenden Kugeln, in der Luft mit Hohlresonatoren durchgeführt, im letzten Falle unter sorgfältigem Eliminieren der Reaktionswirkung. Seine Instrumente sind deshalb von unserem Standpunkte aus im ersteren Falle als Oscillations-, im letzteren als Pulsationsinstrumente zu bezeichnen.

## Sechster Abschnitt.

### Über die wichtigsten Fehlerquellen bei den Versuchen.

**61. Zwei Klassen von Fehlerquellen.** — Ehe wir zu der Besprechung der ganzen Reihe von Versuchen übergehen, die man mit den beschriebenen Instrumenten anstellen kann, ist es wichtig, auf die verschiedenen Fehler aufmerksam zu machen, welche störend eingreifen können.

Unsere Hilfsmittel für den Nachweis von Kräften, welche ruhende Körper angreifen, um sie von einer Gleichgewichtslage in eine andere zu bewegen, haben schon längst eine hohe Entwickelung erreicht. Kräfte, welche bewegte Körper angreifen, sind dagegen nur verhältnismäſsig selten untersucht worden, und für solche Untersuchungen hat sich noch keine höhere Technik entwickelt. Ansprüche, wie man sie jetzt an Elektrometer und Galvanometer zu stellen gewohnt ist, können deshalb bei den beschriebenen hydrodynamischen Instrumenten lange nicht in Frage kommen. Die bekannten Fehler, welche bei elektrometrischen und galvanometrischen Messungen eine Grenze

---

[1] A. Stroh, Journal of the Soc. of Telegraph Engineers II, S. 192, 1882.

[2] P. Lebedew, Wied. Ann. 59, 1896, S. 116; 62, 1897, S. 158.

für die erreichbare Genauigkeit setzen, treten hier ganz in den Hintergrund im Vergleich zu Fehlern anderen Ursprunges. In dem ersten Stadium der experimentellen Untersuchungen bildeten die verschiedenen Launen der Instrumente eine der gröfsten Schwierigkeiten, mit denen man zu kämpfen hatte. Mit der verbesserten Konstruktion sind diese Schwierigkeiten immer mehr zurückgetreten. Aber selbst bei den vollkommensten können schwere Störungen vorkommen, mit deren Ursachen man vertraut sein mufs.

Aufser den Unvollkommenheiten der Instrumente sind noch eine Reihe von anderen Umständen zu beachten, welche eine absolute Übereinstimmung der experimentellen Resultate mit den theoretisch berechneten unmöglich machen. Denn die in der Theorie vorausgesetzten idealisierten Verhältnisse können nie bei konkreten Versuchen vollständig verwirklicht werden. Beim Versuche ist die Flüssigkeit nie reibungslos, absolut inkompressibel und unendlich ausgedehnt. Die in diesen Verhältnissen begründeten notwendigen Nichtübereinstimmungen zwischen Theorie und Experiment werden wir auch, obgleich dies weniger korrekt ist, als Fehler bezeichnen, und im Zusammenhang mit den Folgen der Instrumentfehler behandeln.

**62. Erschütterungen auf den Spitzen.** — Bei allen Instrumenten, welche auf zwei Spitzen beweglich sind (Figuren 19, 23, 24, 25), mufs die obere Spitze etwas Spielraum haben. Während des Betriebes wird sie deshalb notwendig zwischen den Wänden des konischen Loches hin- und hergeschleudert. Hieraus resultieren jedoch keine schwereren Störungen, solange die Amplituden oder die Schwingungsdauern nicht eine gewisse Grenze überschreiten. Bei forciertem Betriebe kommt aber bisweilen eine drehende Bewegung der Pulsations- oder Oscillationswage zu stande, und bei veränderter Intensität des Betriebes kann die Bewegungsrichtung plötzlich in die entgegengesetzte umschlagen. Die Ursache scheint die zu sein, dafs bei gewissen Intensitäten des Betriebes die Spitze einen regelmäfsigen Umlauf in bestimmter Richtung in dem Loch ausführt, und dafs deshalb alle die Stöfse, die sie von den Wänden des Loches empfängt, ein Moment in gleicher Richtung haben.

Am stärksten scheint diese Störung bei dem oscillierenden gleicharmigen Hebel (Figur 23) aufzutreten, wo die Oscillationen eben durch den seitlichen Druck gegen die Spitzen hervorgebracht werden. Der unvorteilhafteste Fall ist der, wo der Hebel in seiner Längenrichtung oscilliert, und wenn dann zugleich die Spitzen

zu grofsen Spielraum haben, können sich auch heftige Vertikalschwingungen der Kugeln einstellen. Diese Störungen werden auch um so leichter aufkommen, je weniger sicher die Führung der Gabel während ihrer Bewegung ist.

Bei dem Oscillationsinstrument Figur 25 hat der Druck gegen die Spitzen nicht mehr die aktive Aufgabe, die Oscillationen zu erzeugen, aber immer noch die passive, der infolge der Oscillationen auftretenden Reaktion der Oscillationswage zu widerstehen. Die Erschütterungen müssen deshalb auch hier mit Notwendigkeit eintreten, um bei forciertem Betriebe die beschriebene schädliche Wirkung zu haben, und zwar vor allem, wenn auch die unten zu erwähnenden elastischen Eigenschwingungen der Instrumentteile hinzukommen.

Während die Erschütterungen dieses Ursprunges bei den Instrumenten auf zwei Spitzen nie ganz vermieden werden können, so lassen sie sich bei den Instrumenten auf einer Spitze ganz eliminieren. Allerdings können sie sich auch hier einstellen und dieselben schädlichen Wirkungen haben. Die Ursache wird aber dann immer eine von den beiden folgenden sein. Entweder ist der Druck des Luftstromes vom Generator einmal während jeden Schlages hinlänglich grofs, um das Instrument von der Spitze zu heben, oder aber die Spannungen und Gegenspannungen sind im Inneren des Oscillators mit dem entgegengesetzt oscillierenden inneren Kern nicht ganz genau ausgeglichen, und es pflanzt sich ein schädlicher Überschufs dieser Spannungen auf die Spitze fort. In allen Fällen kann man natürlich den Fehler entweder dadurch vermeiden, dafs man die Pulsations- oder Oscillationswage schwerer macht, oder auch dadurch, dafs man zu kleineren Pumpenschlägen übergeht. Beide dieser Abänderungen können aber in anderer Hinsicht nachteilig sein, und das rationellste ist, 1. die Ursachen der schädlichen Drucküberschüsse im Luftstrom, und 2. die Ursachen der schädlichen Spannungsüberschüsse im Oscillator nach Vermögen zu entfernen. Mit Rücksicht auf 1. dürfen die Membranen im Pulsator und im Oscillator nie überflüssig stark, und die zu bewegenden trägen Massen in dem Oscillator nie überflüssig schwer gewählt werden (vergl. 58). Mit Rücksicht auf 2. ist die selbstverständliche Bedingung zu erfüllen, dafs der schwere Kern möglichst symmetrisch, und die Membran auf allen Seiten möglichst gleichmäfsig gespannt sein mufs. Übrigens kann man sich gegen das Fortpflanzen von schädlichen Erschütterungen zu der Spitze auch dadurch mit Erfolg schützen, dafs man anstatt der starren Celluloidröhren $r_1\, r_2$ (Figur 27) weiche Gummischläuche benutzt.

Zuletzt mufs es noch als ein Vorteil der Instrumente auf einer Spitze bezeichnet werden, dafs, wenn sich Erschütterungen einstellen, diese sich durch ein scharfes Klappern zu erkennen geben, wodurch man sofort auf den Fehler aufmerksam gemacht wird.

**63. Biegsamkeit und elastische Eigenschwingungen verschiedener Instrumentteile.** — Noch schädlichere Störungen können dadurch auftreten, dafs die verschiedenen Teile der Mechanismen biegsam sind und deshalb in elastische Eigenschwingungen kommen können.

Wir haben schon gelegentlich erwähnt, wie gewisse Pulsationskörper bisweilen unerwartete Eigenschwingungen annehmen (**45**). Ähnliches tritt auch bei hohen Schwingungszahlen mit hinglänglich dünner Membran der gewöhnlichen Pulsationstrommeln ein. Im wesentlichen machen sich jedoch nur bei den Oscillationsinstrumenten die elastischen Eigenschwingungen der Instrumentteile stärker geltend.

Schon bei dem Oscillationsinstrument in Figur 22 (S. 106) erwähnt Schiötz (l. c.), dafs, wenn der Faden zu schwach oder der Betrieb zu schnell war, sich konkordierende Longitudinalschwingungen der parallelen Fäden einstellten, mit dem Erfolge, dafs Anziehung anstatt der erwarteten Abstofsung eintrat. Entsprechende Erscheinungen sind bei allen Oscillationsinstrumenten möglich. Wenn der Oscillationshebel Figur 23 zu schwach, oder die Schwingungszahl zu hoch ist, kommt er in elastische Transversalschwingungen und bei dem Instrumente in Figur 25 kann es passieren, dafs auch der ganze Rahmen an den Schwingungen teilnimmt. Mit diesen Schwingungen der Instrumentteile folgen nun selbstverständlich auch meistens ganz andere Schwingungen der Kugeln als die, für welche man eingestellt hat, wie schon das Beispiel mit dem Instrumente in Figur 22 zeigte. Ist man darauf nicht aufmerksam, so kann man bei der Beurteilung der Versuche ganz irre geführt werden.

Verhältnismäfsig leicht entdeckt man den Fehler, wenn die Veränderung die Richtung der Schwingungen betrifft. Dieses ist beispielsweise der Fall, wenn die elastischen Eigenschwingungen bei dem für transversale Beweglichkeit eingestellten Oscillationsinstrumente in Figur 25 b hervorkommen. Denn die Schwingungen elastischen Ursprunges sind dann vertikal, während das Instrument bei normalem Betriebe nur horizontale Oscillationen giebt. Viel schlimmer versteckt sich aber der Fehler, wenn die elastischen Schwingungen mit denjenigen, welche das Instrument bei normalem Betriebe giebt, gleichgerichtet sind. Denn der Durchgang durch die Resonanzstelle ist bekanntlich mit einer Phasenverschiebung ver-

bunden, und diese kann ein Umschlagen der Kraftrichtung zur Folge haben, das ganz unerklärlich scheint, wenn man auf den Zusammenhang nicht aufmerksam ist.

Dieses Eingreifen der Elasticität des Materials, aus dem die Instrumente gemacht sind, läfst sich durch keine Kunstgriffe vermeiden. Nur mufs man solche Konstruktionen zu finden suchen, wo diese Störungen erst bei möglichst hohen Schwingungszahlen eintreten. Dazu hat man die Kugeln möglichst leicht, und die Instrumentteile auf einmal möglichst leicht und starr zu wählen. Aufserdem ist hervorzuheben, dafs, je kleiner man die Instrumente unter sonst gleichen Umständen macht, die kritischen Schwingungszahlen um so höher werden. Es hat sich deshalb immer gezeigt, dafs die älteren Oscillationsinstrumente um so besser funktionierten, je kleiner sie gemacht wurden, und am allerbesten wirkte der äufserst kleine Oscillationshebel, dessen Gabel an einer elektromagnetisch getriebenen Stimmgabel befestigt wurde (**53**, S. 108). Auch sind die Resultate nie besonders gut ausgefallen, wenn das Oscillationsinstrument in Figur 25 gröfser gebaut wurde, um die Versuche vor einem gröfseren Auditorium sichtbar zu machen.

Die besten Instrumente sind auch in dieser Hinsicht diejenigen, wo der bewegliche Instrumentteil auf einer Spitze ruht. Allerdings treten schon bei der Pulsationswage auf einer Spitze gleich nach dem Ingangsetzen gewisse pendelnde Bewegungen mit grofsen Amplituden auf (**49**), und bei der Oscillationswage ist dies noch mehr der Fall. Diese ganz langsamen Pendelbewegungen beruhen aber auf der Schwere der herunterhängenden Teile, und sie nehmen schnell ab, wenn man zu höheren Schwingungszahlen übergeht. Dann hat man aber erst bei sehr hohen Schwingungszahlen Störungen durch elastische Eigenschwingungen zu befürchten. Denn die transversal-elastischen Eigenschaften der Röhren, welche die Kugeln tragen, kommen nicht in Frage, weil sie nur den Luftstrom leiten, und nichts mit der Transmission der Kraft selbst zu thun haben. Nur bei der belasteten Membran im Oscillator mit dem entgegengesetzt oscillierenden inneren Kern kommen notwendig elastische Eigenschwingungen vor. Nachdem aber die Verbindung mit der Pumpe gemacht ist, sind es nicht die Eigenschwingungen, welche die belastete Membran an sich hat, die in Frage kommen, sondern diejenigen, welche auftreten, wenn sie auf der einen Seite eine eingeschlossene Luftmasse hat. Die Unvollkommenheiten, denen man dabei begegnet, sind deshalb die der pneumatischen Transmission. Diese wird bei allen Instrumenten benutzt, und wir werden

sie gleich für sich behandeln. Neben der von den Pumpen direkt regulierten Grundschwingung der Membran können noch Oberschwingungen vorkommen, von denen die niedrigste eine solche ist, wobei die Kugel und der Kern entgegengesetzt gerichtete Drehungen um einen Kugeldurchmesser ausführen. Wegen der nie ganz zu vermeidenden Asymmetrie stellen sich auch in der That bei einer gewissen Schwingungszahl heftig drehende Schwingungen ein. Diese Schwingungszahl wird aber nicht leicht bei den beschriebenen Instrumenten erreichbar sein, wenn man die für Instrumente dieser Dimensionen meistens zu empfehlende Dicke der Membran von etwa 0,3 bis höchstens 0,5 mm benutzt. Dünnere Membranen sind aber aus Rücksicht auf diese Oberschwingungen nur bei niedereren Betriebsgeschwindigkeiten zu empfehlen.

Zuletzt ist noch zu erwähnen, dafs bei gewissen Schwingungszahlen sich auch elastische Eigenschwingungen des Statives, welches die beweglichen Instrumentteile trägt, einstellen, und man mufs notwendig entweder bei etwas niederer oder bei etwas höherer Schwingungszahl arbeiten. Ähnlich kommt der Tisch, auf dem der Generator ruht, bei gewissen Betriebsgeschwindigkeiten in Schwingungen, und es empfiehlt sich deshalb, den Generator und die eigentlichen Instrumente auf getrennten Tischen aufzustellen. Mit Rücksicht auf diesen Übelstand wäre es auch eine wesentliche Verbesserung, die Pumpencylinder des Generators (Figur 15) vertikal zu stellen, da gewöhnliche Tische vertikale Erschütterungen viel besser als horizontale vertragen.

**64. Die elastische Natur der pneumatischen Transmission.** — Zuletzt mufs man, wie schon hervorgehoben, sich erinnern, dafs die bei sämtlichen Instrumenten benutzte pneumatische Transmission nicht eine starre, sondern eine elastische ist. In allen Fällen hat man eine Anordnung, welche man schematisch als die folgende betrachten kann. Zwischen zwei Kolben ist eine gewisse Luftmasse eingeschlossen; der erste Kolben führt eine vorgeschriebene Bewegung aus, und der zweite, welcher eine gewisse Trägheit hat, oder mit gewissen trägen Massen verbunden ist, wird von dem Druck der eingeschlossenen Luftmasse bewegt. Wird nun der erste in Ruhe gehalten, so wird der zweite Eigenschwingungen genau wie eine auf einer elastischen Feder befestigte Masse ausführen können, und die Wirkungsweise der Transmission wird davon abhängen, ob die Periode des ersten Kolbens länger, gleich oder kürzer als die dieser Eigenschwingungen ist.

Bewegt sich der Generatorkolben erst sehr langsam, so wird der andere Kolben die Bewegung genau mitmachen. Mit steigender Schwingungszahl tritt aber allmählich eine Verspätung ein. Der zweite Kolben passiert etwas später als der erste durch die entsprechenden Lagen. Diese Verspätung beträgt ein Viertel der ganzen Schwingungsdauer, wenn die Periode des Generatorkolbens mit der der Eigenschwingungen übereinstimmt. Wenn schliefslich die Schwingungszahl des Generatorkolbens hinlänglich weit an dieser kritischen Schwingungszahl vorbeipassiert ist, beträgt die Verspätung eine halbe Schwingungsdauer. Die zwei Kolben schwingen dann entgegengesetzt. Gleichzeitig mit diesen Phasenverschiebungen hat man noch Veränderungen der Amplitude, denn bei der kritischen Schwingungszahl geht die Amplitude der Schwingungen des zweiten Kolbens durch ein Maximum. Diese als Funktion der Schwingungszahl auftretende Veränderung der Bewegung des zweiten Kolbens verläuft sonst sehr verschieden, je nach dem Betrage des Reibungswiderstandes. Ist die Reibung klein, so wird das Maximum der Amplituden scharf ausgeprägt sein und die Phase bei der Passage durch die Resonanzstelle sehr rasch umschlagen. Hat die Reibung dagegen einen grofsen Wert, so bemerkt man nur ein undeutliches Maximum, und die Verschiebung der Phase verläuft ganz allmählich.

Diese Veränderungen der Amplituden und Phasen sind ganz unschädlich, wenn sie bei der Transmission zu den zwei pulsierenden oder oscillierenden Körpern, deren Wirkung aufeinander man untersucht, vollständig parallel verlaufen. Was man dann wahrnehmen wird, beschränkt sich darauf, dafs bedeutend stärkere Wechselwirkungen zwischen den zwei Körpern im Resonanzfalle auftreten als bei den niedrigeren wie bei den höheren Schwingungszahlen. Wenn aber der eine Resonanzpunkt bei niedrigeren, der andere bei höheren Schwingungszahlen vorkommt, so ist ein zweimaliges Umschlagen der Richtung der Kraft zu erwarten. Dies wird ganz unerklärlich erscheinen, wenn man auf die Phasenverschiebung bei der pneumatischen Transmission nicht aufmerksam achtet.

Um nun Störungen dieses Ursprunges möglichst zu vermeiden, hat man auf das Folgende zu achten. Erstens ist es wünschenswert, dafs der Resonanzpunkt so hoch wie möglich liegt. Dazu hat man die eingeschlossene Luftmasse so klein wie möglich zu machen, und unnötig grofse Trägheit der zu bewegenden Massen zu vermeiden. Aber selbst wenn man diese beiden Bedingungen möglichst erfüllt, so wird der Resonanzpunkt für Instrumente der beschriebenen Dimensionen doch meistens innerhalb der Grenze der erreichbaren

Geschwindigkeiten liegen. Zweitens muſs man deshalb für möglichst groſse Symmetrie sorgen, so daſs die Resonanzpunkte für die zwei betriebenen Systeme einander möglichst nahe fallen. So vermeidet man es vor allem, Zuleitungsschläuche mit weit verschiedenen Längen zu benutzen. Es ist jedoch auffällig, wie selten man schwereren Störungen wegen dieser Phasenverschiebungen begegnet, wenn man nur auf eine ungefähre Symmetrie achtet. Dies beruht ohne Zweifel auf der starken Reibung der Luft in den Schläuchen, weswegen die Resonanzerscheinung nur wenig ausgeprägt ist. Die Phasenverschiebungen verlaufen so langsam, daſs ein Phasenunterschied zwischen den zwei schwingenden Systemen, welcher zu mehr als einer Viertelphase anwächst, und somit mit Umkehrung der Kraftrichtung verbunden ist, nur selten vorkommt, wenn nur nicht die zwei Resonanzpunkte allzu weit voneinander entfernt sind.

Andererseits kann man aber leicht durch absichtliche Asymmetrie das Umschlagen der Kraft zeigen. Schaltet man bei dem Pulsationsversuch unterwegs zu dem einen Pulsationskörper eine Flasche mit einem bis zwei Liter Luft ein, so wird der Resonanzpunkt für diesen Körper stark erniedrigt. Stellt man nun den Generator auf gleiche Schläge ein, so zeigt sich bei langsamem Betriebe die Anziehung. Bei steigender Betriebsgeschwindigkeit tritt aber plötzlich bei einer gewissen Schwingungszahl Abstoſsung ein, und genauere Beobachtung zeigt immer, daſs die Pulsationen des Körpers, welcher mit der Flasche verbunden ist, kurz vor der Umkehrung der Kraftrichtung durch ein, wenn auch nicht besonders scharf ausgeprägtes Maximum passiert sind. Zwei Umkehrungen kurz nacheinander kann man erhalten, wenn man in die Leitung zu dem einen Pulsationskörper eine gröſsere, in die Leitung zu dem anderen eine kleinere Flasche einschaltet. Man kommt aber wegen der starken Reibung sehr leicht wieder auf den Fall, daſs der Unterschied der zwei Phasenverschiebungen zu klein wird, um eine Umkehrung der Kraftrichtung veranlassen zu können.

Es sei andererseits auch hervorgehoben, daſs man durch Ausnutzung der Resonanzen, eventuell unter Einschaltung kleiner Flaschen, um die Resonanzpunkte passend weit herunterzubringen, sehr schöne Versuche erhalten kann. Bei der Wechselwirkung zweier pulsierender oder zweier oscillierender Körper, wo die Symmetriebedingungen sehr leicht erfüllt werden können, fällt dieses leicht, bei der Wechselwirkung zwischen einem pulsierenden und einem oscillierenden dagegen natürlich etwas schwerer.

**65. Der Einfluſs der Begrenzungen der Flüssigkeit und des endlichen Abstandes zwischen den Körpern.** — Wie oft hervorgehoben, sind die theoretischen Resultate, die wir zu prüfen vorhaben, unter der Voraussetzung entwickelt, daſs die Flüssigkeit unbegrenzt ist, während die Versuche in einer von freier Oberfläche und festen Wänden begrenzten endlichen Flüssigkeitsmasse vorgenommen werden.

Was zunächst die freie Oberfläche betrifft, so ist ohne weiteres klar, daſs man nie die Versuche so nahe an derselben anstellen darf, daſs sich stärkere Wellen durch die Pulsationen und Oscillationen bilden. Man braucht die schwingenden Körper aber nicht sehr tief unter die Wasserfläche zu bringen, damit diese Wellen fast verschwinden. Eine bis zwei Kugeldurchmesser genügen schon meistens. Es bleiben dann nur die meistens ganz kleinen Wellen übrig, welche die durch die Wasserfläche passierenden schwingenden Instrumentteile unvermeidlich erzeugen. Schwerere Störungen durch dieselben sind aber nie zu merken.

Mit dem Einfluſs der festen Wände sind wir schon durch frühere Versuche vertraut (**26**, **37**). Die Wirkung, welche eine einzige, unendlich ausgedehnte feste Wand auf das gegebene System ausübt, ist dieselbe, welche das Spiegelbild des Systemes in der Wand ausüben würde, wenn sich die Flüssigkeit durch die Wand fortgesetzt hätte. In einem gewöhnlichen viereckigen Gefäſse mit ebenem Boden und mit vier ebenen vertikalen Wänden kann man dieses Resultat zwar nicht exakt, aber doch qualitativ auf jede Wand für sich in Anwendung bringen, und dadurch einen allgemeinen Anhalt für die Beurteilung der auf dem Einfluſs der Wände beruhenden Störungen erhalten.

Die gröſsten Störungen werden immer von den Wirkungen herrühren, welche der bewegliche pulsierende oder oscillierende Körper von seiten seines eigenen Spiegelbildes erleidet. Die lineare Wirkung dieses Spiegelbildes ist immer eine anziehende. Der bewegliche Pulsations- oder Oscillationskörper wird deshalb immer von der nächsten Wand angezogen, und diese Anziehung kann bei genügend kleinem Abstande viel stärker sein als die direkte Wirkung desjenigen Pulsators oder Oscillators, welche Gegenstand der Untersuchung ist. Auf die drehbare oscillierende Kugel wird das Spiegelbild drehend wirken, in der Weise, daſs ihre Oscillationsachse ins Gleichgewicht kommt, wenn sie längs der Normale zur Wand fällt. Alle Wirkungen der vier Seitenwände heben sich in der Mitte des Gefäſses auf, und den beweglichen Pulsations- und Oscillationskörper

bringt man deshalb immer in diesem mittleren Gebiete des Gefäſses an. Die von dem Boden ausgehende Wirkung ist unschädlich insofern, als sie immer senkrecht zu der Beweglichkeitsrichtung des beweglichen Körpers steht.

Die Spiegelbilder der fest aufgestellten Pulsatoren oder Oscillatoren haben nie Wirkungen, welche in auffälliger Weise in den qualitativen Verlauf der Erscheinungen eingreifen. Je nach den Umständen kann das Spiegelbild die direkte Wirkung etwas verstärken oder etwas abschwächen, das letztere aber nie in solchem Grade, daſs sich die Richtung der resultierenden Kraft verändert. Wohl aber merkt man dieses leicht bei messenden Versuchen, und die Verschiebung der Spiegelbilder, welche mit der Verschiebung des Körpers selbst folgt, macht es unmöglich, in einem kleinen Gefäſse das reine Abstandsgesetz für die Wechselwirkung zweier Körper zu finden.

Auſser der Unbegrenztheit der Flüssigkeit setzt die Theorie auch voraus, daſs der Abstand zwischen den wirkenden Körpern immer groſs im Vergleich zu ihren Dimensionen sein soll. Einigermaſsen kann diese Bedingung innerhalb des Gefäſses erfüllt werden. Im Verlaufe der Versuche werden aber die Körper unvermeidlich auch ganz nahe aneinander kommen müssen. Meistens beobachtet man dabei nur dieselbe Kraft wie im gröſseren Abstande, nur mit entsprechend gröſserer Intensität. Gelegentlich treten aber auch ganz unerwartete Wirkungen ein. Diese sind immer gleicher Art, wie die Anziehung der Körper zu den Wänden, und werden später für sich untersucht werden, wenn wir zu den Kräften höherer Ordnung übergehen. Wir wollen auch nur vorläufig diese Wirkungen der Wände und die in kleinem Abstande auftretenden höheren Wirkungen zwischen den Körpern als Versuchsfehler bezeichnen, nämlich solange wir uns nur mit den Kräften niederer Ordnung beschäftigen. Später werden sie eben als vorzügliche Belege für die Richtigkeit und Vollständigkeit der Theorie hervortreten.

**66. Bildung von cirkulierenden Bewegungen in der Flüssigkeit.** — In unseren theoretischen Ableitungen haben wir vorausgesetzt, daſs die Flüssigkeit homogen, inkompressibel und reibungslos ist. Es folgt dann, daſs die Bewegung, welche fremde Körper erzeugen, zu der Klasse der nicht wirbelnden oder nicht cirkulierenden Bewegungen gehören, und eine besondere Folge ist, daſs in demselben Augenblicke, wo die Bewegung der fremden Körper aufhört, auch jede Bewegung in der Flüssigkeit aufhört (I, 16).

Es zeigt sich, daſs die letzte Folgerung bei den Versuchen nicht zutrifft. Beobachtet man die Bewegung kleiner suspendierter Teilchen, etwa feiner Holzfeilspäne, so zeigt es sich, daſs eine gewisse Bewegung der Flüssigkeit einige Zeit fortdauert, nachdem die Schwingungen der Pulsationskörper oder der oscillierenden Kugeln aufgehört haben. Diese zurückbleibenden Bewegungen sind notwendig cirkulierender oder wirbelnder Natur. Denn eine Potentialbewegung ist immer mit Bewegungen der Grenzflächen der Flüssigkeit verbunden. In einem ruhenden Gefäſse, wo die eingetauchten Körper in Ruhe sind, kann eine solche Bewegung gar nicht bestehen. Es steht also fest, daſs in einem vitalen Punkte eine Nichtübereinstimmung vorhanden ist zwischen den Voraussetzungen, unter welchen die analytisch abgeleiteten Resultate streng gültig sind, und den Verhältnissen, welche bei den Versuchen mit konkreten Flüssigkeiten vorliegen.

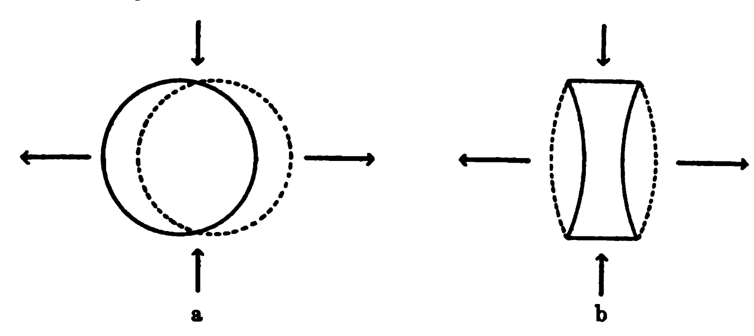



Fig. 29, a und b. Ströme in der Umgebung einer oscillierenden Kugel (a), und einer pulsierenden Trommel (b).

Diese cirkulierenden Bewegungen, welche nach dem Aufhören der Pulsationen oder Oscillationen fortdauern, bilden sich auch nicht momentan in demselben Augenblicke, wo die Pulsationen oder Oscillationen einsetzen. Sie enstehen allmählich und nehmen allmählich ab, im Gegensatze zu der reinen Potentialbewegung, welche momentan einsetzt und momentan wieder verschwindet. Im allgemeinen befolgen sie recht komplicierte Gesetze. Die folgenden allgemeinen Züge lassen sich aber für die oscillierende Kugel und für die gewöhnliche Pulsationstrommel angeben: Wenn die Schwingungen eine kurze Zeit angedauert haben, so haben sich zwei Ströme ausgebildet, welche von den zwei Polen der oscillierenden Kugel (Figur 29a), beziehungsweise von den Mittelpunkten der zwei Membranen der Pulsationstrommeln (Figur 29b) ausgehen. Diese Ströme sind oft, jedenfalls da, wo sie ihre stärkste Geschwindigkeit haben,

ziemlich schmal und fast mit Flüssigkeitsstrahlen zu vergleichen. Sie entwickeln sich bald zu solcher Länge, daſs sie die Wände des Gefäſses erreichen, und es bilden sich Rückströmungen längs der Wände, so daſs allmählich die ganze Flüssigkeitsmasse in Cirkulation kommt. Den ziemlich stark lokalisierten Abströmungen von den Polen entspricht dabei ein allgemeines Nachströmen mit kleineren Geschwindigkeiten in den äquatorialen Gegenden. Diese cirkulierende Bewegung nimmt mit der Zeit an Intensität zu, bis die Reibung eine Grenze setzt, und nach dem Aufhören der Pulsationen oder Oscillationen besteht sie, wie erwähnt, einige Zeit fort, bis sie infolge der Reibung verschwindet.

Eine Beobachtung, die man bald bei diesen Strömen macht, und die für uns besonders wichtig ist, ist die folgende. Sie entwickeln sich viel stärker, wenn die Pulsationen oder die Oscillationen mit groſsen Amplituden und entsprechend langen Schwingungsdauern, als wenn sie mit kleinen Amplituden und kurzen Schwingungsdauern verlaufen. Wie die Intensität der erzeugten Ströme quantitativ von Amplituden und Schwingungsdauern abhängt, ist nie durch Messungen festgestellt worden. Man merkt aber sofort den Unterschied sehr deutlich, wenn man die Bewegung der suspendierten Partikelchen beobachtet.

Dieser Unterschied der Intensität der Ströme hat nun zur Folge, daſs, wenn man mit groſsen Amplituden und langen Schwingungsdauern arbeitet, die Wirkung der Ströme leicht über die der hydrodynamischen Fernkräfte die Oberhand gewinnt. Geht man dagegen zu kurzen Schwingungsdauern und kleinen Amplituden über, so treten die Wirkungen der Ströme ganz neben denjenigen der hydrodynamischen Fernkräfte in den Hintergrund. Bei den ältesten unsicheren Versuchen, wo vielfach zu groſsen Amplituden gegriffen wurde, in der Hoffnung, stärkere Kräfte zu erhalten, trat anstatt dessen oft die Wirkung des gebildeten stärkeren Stromes hervor. Nachdem aber jetzt die Instrumente mit Rücksicht auf diese und auf andere Erfahrungen durchgehend auf die Anwendung von sehr beschränkten Amplituden und gleichzeitig auf verhältnismäſsig hohe Schwingungszahlen eingerichtet worden sind, treten diese Störungen ganz in den Hintergrund. Wenn Störungen dieses Ursprunges bei den unter Wasser pendelförmig schwingenden Kugeln nicht merkbar hervortraten, wo doch verhältnismäſsig groſse Amplituden benutzt wurden (**29**), so beruht dies ohne Zweifel darauf, daſs die Schwingungen zu kurze Zeit andauern, um eine Entwickelung der Ströme zu gröſserer Intensität veranlassen zu können.

Bei den beschriebenen Instrumenten der neuesten Konstruktion kann man sagen, dafs man die Wirkungen der Ströme bei qualitativen Versuchen überhaupt nur in einer Erscheinung verspürt. Wenn nämlich die zwei Membranen des beweglichen Pulsationskörpers nicht genau gleich gespannt sind, so wird von der schwächer gespannten Membran ein stärkerer Strom als von der stärker gespannten ausgehen. Durch die Reaktion wird dann der Pulsationskörper in Bewegung gesetzt, in solcher Richtung, dafs die stark gespannte Membran vorausgeht. Da man nun natürlich nie ganz genau gleiche Membranen erhält, wird bei dem Pulsationsinstrumente fast immer eine schwache Tendenz zu einer Eigenbewegung in einer bestimmten Richtung vorhanden sein. Wenn man dünne Membranen benutzt, die bei höheren Schwingungszahlen in Eigenschwingungen komplicierterer Natur kommen, so können diese Eigenbewegungen auch bei gewissen Schwingungszahlen besonders stark hervortreten.

Ähnliche Eigenbewegungen kann man auch, obgleich seltener, bei der Oscillationswage beobachten, wenn nämlich eine gewisse Asymmetrie der Oscillationen vorliegt, so dafs die Beschleunigung in der einen Umkehrlage stärker ist als in der anderen.

Dagegen hat man bei der Oscillationswage eine andere Reaktion, welche auf dem Auswerfen der Luft durch die Ausflufsröhre $r_2$ (Figur 27) beruht, und welche eine schädliche Komponente hat, wenn diese Röhre nicht genau vertikal mündet. Obgleich sich dies in der Luft abspielt, ist die Erscheinung gleicher Art, wie die Reaktionsbewegung, welche der Pulsationskörper mit den ungleichen Membranen im Wasser ausführt, und offenbar sind diese, in unseren Versuchen als Fehlerquellen auftretenden Reaktionsbewegungen mit denjenigen verwandt, welche verschiedenen der Dvořák'schen Versuche zu Grunde liegen (**60**).

Diese Tendenzen zu Eigenbewegungen ergeben, dafs in vielen Fällen die Torsionswage, selbst als qualitatives Instrument, den auf Spitzen beweglichen Instrumenten vorzuziehen ist. Denn die Reaktion bringt die Torsionswage nur zu einer neuen, der „dynamischen" Gleichgewichtslage. Selbst unter den ungünstigsten Verhältnissen sind aber diese Reaktionsbewegungen nie so stark, dafs sie nicht durch die hydrodynamischen Fernkräfte überwunden werden. Bei messenden Versuchen mufs man aber natürlich auf sie aufmerksam sein, ebenso wie auf die Fortführung der beweglichen Pulsations- oder Oscillationskörper durch die von den fest aufgestellten ausgehenden Ströme. Diese Fortführung ist immer zu schwach, um bei den qualitativen Versuchen über die Wechselwirkung selbständig

pulsierender oder oscillierender Körper die Kraftrichtungen umzukehren. Bei den später zu beschreibenden Versuchen mit den temporären Fernkräften kann sich dagegen diese Fortführung sehr deutlich geltend machen.

**67. Über reguläre und tumultuarische Wasserbewegungen.** — Es ist, wie schon erwähnt, schwer, deutlich zu sehen, wo und wie die beschriebenen cirkulierenden Bewegungen primär entstehen. Es liegt aber nahe, diese Abweichungen von dem, was man theoretisch erwartet, mit anderen ähnlichen in Verbindung zu setzen. Denn solchen Abweichungen begegnet man in der Hydrodynamik häufiger, als in jedem anderen Zweige der mechanischen Wissenschaften. Sie sind so häufig und so bedeutend, daſs es die Ingenieure notwendig gefunden haben, eine praktisch-empirische Wissenschaft, die Hydraulik, zu entwickeln, anstatt die Resultate der rationellen Hydrodynamik zu benutzen. Die Ursache dieser Abweichungen scheint in einer umfassenden Klasse von Fällen ein und dieselbe zu sein, nämlich eine teilweise Instabilität derjenigen regulären Flüssigkeitsbewegungen, welche die bis jetzt bekannten Integrale der hydrodynamischen Gleichungen darstellen, und welche deshalb in Bewegungen tumultuarisch-wirbelnder Natur übergehen.

Die Theorie giebt das bekannte Resultat, daſs sich eine Kugel mit konstanter Geschwindigkeit widerstandslos durch eine homogene, inkompressible und reibungslose Flüssigkeit bewegen soll. Daſs man in einer realen Flüssigkeit einen Widerstand erhält, hat beim ersten Anblick nichts Überraschendes, da eine solche nicht mehr reibungslos ist. Das Überraschende ist aber das Widerstandsgesetz. Denn der Versuch giebt Proportionalität mit dem Quadrate der Geschwindigkeit, während man bei einem reinen Reibungswiderstande Proportionalität der ersten Potenz der Geschwindigkeit zu erwarten hätte. Die Ursache liegt auf der Hand, wenn man die in der Flüssigkeit entstandene Bewegung untersucht. Die Lösung für den Fall der reibungslosen Flüssigkeit giebt eine vollständig symmetrische Bewegung vor und hinter der Kugel, und dieselbe Symmetrie zeigen die Lösungen, die wir für den Fall der reibenden Flüssigkeit besitzen. Bei dem Versuche tritt aber eine Asymmetrie auf. Denn vor der Kugel erhält man sehr genau die erwartete Bewegung; hinter ihr bildet sich aber ein aus wirbelnden und tumultuarisch bewegten Flüssigkeitsmassen bestehendes Kielwasser.

Zur Erklärung der Bildung des Kielwassers hat schon Stokes die Vermutung ausgesprochen, daſs die Bewegung, welche die theo-

retische Lösung verlangt, im Raume hinter der Kugel instabil ist.[1] Wenn die theoretisch vorausgesetzten Bedingungen exakt erfüllt sind, stellt die bekannte Lösung nicht nur eine mögliche, sondern die einzig mögliche Flüssigkeitsbewegung dar. Greift aber eine Störung ein, selbst die kleinste, in dem Gebiete, wo die Lösung instabil ist, so wird ihre Wirkung nie verschwinden, sondern immer mehr und mehr sich anhäufende Abweichungen von der ursprünglichen Bewegung zur Folge haben, bis zuletzt die Bewegung ganz verändert worden ist.

Obgleich die allgemeinen Kriterien für die Stabilität von Flüssigkeitsbewegungen nicht formuliert worden sind und eine definitive theoretische Entscheidung der Frage also noch nicht möglich ist, so scheint das, was man beobachtet, mit der Stokes'schen Annahme in der besten Übereinstimmung zu stehen. Denn wenn die Bewegung von einem Zustande der Ruhe aus anfängt, so zeigt es sich, dafs die theoretische Forderung von der Symmetrie der Bewegung vor und hinter der Kugel während der ersten Zeitmomente genau erfüllt ist. Mit der Zeit nehmen aber die Abweichungen immer mehr zu, bis sich das vollständige Kielwasser entwickelt hat.

In einem Falle zeigen nun die Beobachtungen ganz deutlich, dafs die Bildung der Ströme, welche von der oscillierenden Kugel ausgehen, mit der Bildung des Kielwassers in naher Verbindung steht. Bewegt man nämlich die Kugel durch die Flüssigkeit über eine Strecke von mehreren Kugeldiametern, und hält dann plötzlich inne, so sieht man, wie ein Teil des tumultuarisch bewegten Kielwassers an der Kugel vorbeiströmt, und seine Bewegung auf der anderen Seite derselben fortsetzt. Oscilliert die Kugel regelmäfsig mit Amplituden dieser Gröfse, so sieht man, wie sich diese Erscheinung bei jeder Umkehr der Kugel regelmäfsig wiederholt. Verkleinert man die Amplituden, so kann man immer noch eine anfangende Kielwasserbildung auf der hinteren Seite beobachten, welche mit der Entwickelung eines wirbelringartigen Bewegungsgebildes in der unmittelbaren Nähe der Kugel anfängt. Wenn die Kugel ihre Bewegung umkehrt, so gleitet dieser Wirbelring längs der Oberfläche der Kugel hin, um zu der Bildung des ausgehenden Stromes beizutragen.

Geht man zu schnelleren und kleineren Schlägen über, so wird es bald unmöglich, die genaueren Umstände bei der Entstehung der Bewegung zu verfolgen. Man sieht nur die zwei von den Polen der

---

[1] G. G. Stokes, Mathematical and physical papers, Band I, S. 53.

Kugel ausgehenden Ströme. Ohne Zweifel mufs aber die Wirbelbildung mehr und mehr in den Hintergrund treten und die Ströme bilden sich zuletzt vielleicht nur durch das Auswerfen von kleinen Wassermassen aus der dünnen, durch die Reibung mitgeschleppten Schicht, welche immer in der unmittelbaren Nähe der Oberfläche vorhanden sein mufs.

Welches auch die Ursache der immer noch vorhandenen Ströme sei, wenn man zu sehr kleinen Amplituden und entsprechend hohen Schwingungszahlen übergegangen ist, so wird doch der Unterschied der zwei Grenzfälle klar. Geht man in der Richtung grofser Amplituden und langer Schwingungsdauern zu weit, so kann sich die Wirkung der Instabilitäten in ihrem vollen Umfange geltend machen. Anstatt der Bewegungen, welche wir nach unseren theoretischen Lösungen erwarten, erhalten wir zum grofsen Teil oder vielleicht hauptsächlich die tumultuarischen und wirbelnden Bewegungen. In diesem Falle werden dann unsere hydrodynamischen Fernwirkungsformeln die bei dem Experimente gefundenen Resultate ebenso unvollkommen wiedergeben, wie der Satz von der widerstandslosen Bewegung das Gesetz von der wirklichen Bewegung einer Kugel durch eine reale Flüssigkeit wiedergiebt. Geht man dagegen in der anderen Richtung zu der Grenze, indem man kleine Amplituden und kurze Schwingungsdauern anwendet, so können sich die Instabilitäten nur in verschwindendem Mafse geltend machen. Die tumultuarischen Bewegungen haben nicht Zeit, sich zu entwickeln, während die Potentialbewegung für jede Schwingung neugebildet wird. Von den verhältnismäfsig schwachen Strömen abgesehen, die wir beschrieben haben, und welche, entweder als ein letzter Rest der tumultuarischen Bewegungen, oder auch als eine Wirkung nur der Reibung der Flüssigkeit entstehen, erhalten wir die von der Theorie vorausgesetzten Bewegungen, und es ist eine gute Übereinstimmung zwischen den theoretisch abgeleiteten hydrodynamischen Fernwirkungsformeln und den Versuchsergebnissen zu erwarten.

## Siebenter Abschnitt.

### Qualitative Versuche über die permanenten hydrodynamischen Energiekräfte.

**68. Allgemeines über die Versuchsanordnung.** — Wir werden uns nun im folgenden mit den Versuchen beschäftigen, so wie sie

verlaufen, wenn die oben behandelten Störungen möglichst wenig hervortreten. Dabei denken wir uns, daſs die in den meisten Fällen vorzuziehenden Instrumente benutzt werden, nämlich entweder die Torsionswage (Figur 21), oder auch das Instrument, wo der bewegliche Instrumentteil auf einer Spitze ruht (Figur 28). In das bewegliche Instrument wird einmal eine gewöhnliche Pulsationstrommel und einmal ein Oscillator mit entgegengesetzt oscillierendem inneren Kern eingeschaltet; der Oscillator wird dabei nacheinander auf die drei verschiedenen Arten der Beweglichkeit eingestellt (Figur 28). Als Körper, welcher die Wirkung ausübt, oder als Aktionskörper, wie wir uns der Kürze halber ausdrücken werden, dient entweder ein trommelförmiger Pulsator (Figur 18b) oder ein Oscillator mit Kern (Figur 27) und dieser Aktionskörper wird in alle möglichen Lagen zu dem beweglichen gebracht.

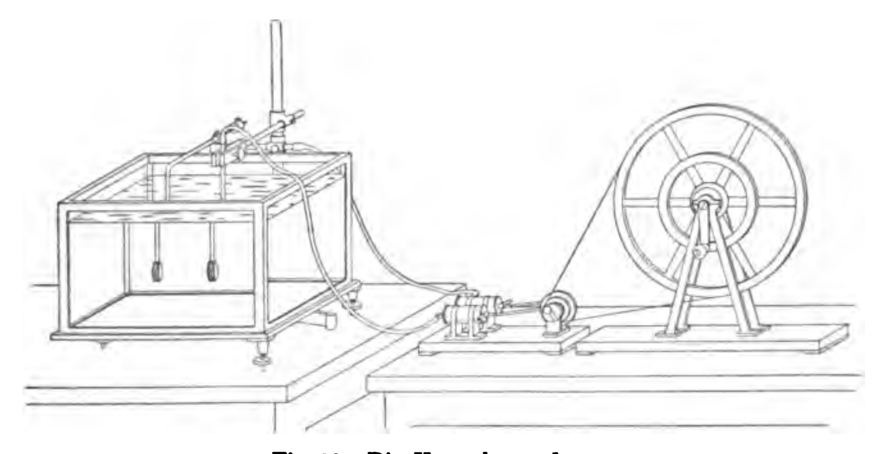


Fig. 30. Die Versuchsanordnung.

Da wir keine Messungen vorhaben, können wir uns des einfacheren Generators (Figur 15) bedienen. Um einigermaſsen konstanten Betrieb zu erhalten, genügt es, das Schwungrad nach den Schlägen eines Metronomes zu drehen.

Die ganze Versuchsanordnung für den Fall, daſs sowohl der bewegliche Körper wie der Aktionskörper pulsierend sind, sieht man aus der Figur 30. Das Wasser ist in dem schon früher erwähnten Aquarium enthalten, welches quadratisch von 50 cm Seitenlänge und 30 cm Höhe ist, inwendig gemessen. Auſserhalb des Aquariums steht das Stativ der Pulsations- oder der Oscillationswage, und ins Wasser tauchen nur der bewegliche Körper und der Aktionskörper mit ihren Zuleitungsröhren.

Die in den Hauptlagen zu erwartenden Resultate lassen sich mit Hilfe der schematischen Figuren 2, 6 und 7 ableiten, wenn man sich erinnert, dafs immer nur der eine der zwei Körper beweglich ist, und aufserdem eine beschränkte Bewegungsfreiheit hat, so dafs gewöhnlich nur eine Komponente der Kraft zu Wirkung kommt. Dies hat zur Folge, dafs die Zahl der charakteristischen Versuche aufserordentlich viel gröfser wird, als wenn man mit ganz freien Körpern arbeitet, wie wir es früher thaten. Die Resultate der Hauptversuche sind durch die schematischen Figuren 31—36 veranschaulicht. Dabei sind der pulsierende und der oscillierende Körper in der vereinbarten Weise durch voll ausgezogene und gestrichelte Kreise dargestellt, und ein gestrichelter Kreisbogen stellt die Bahn dar, welche der bewegliche Körper durchlaufen kann.

Zum Vergleiche mit den magnetischen Erscheinungen sind zugleich in diesen Figuren die *n* und *s* eingezeichnet, welche die Pole des analogen magnetischen Systems angeben. Man wird dann in jedem einzelnen Falle darthun können, dafs die beobachteten Bewegungen eben die sind, welche im Falle des Magnetismus eintreten würden, wenn man zwischen gleichnamigen Polen Anziehung und zwischen ungleichnamigen Abstofsung gehabt hätte.

Es empfiehlt sich aber auch sehr, um den richtigen Eindruck der Analogie zu erhalten, sämtliche magnetische Versuche neben den entsprechenden hydrodynamischen wirklich auszuführen. Entsprechend der Pulsationswage konstruiert man dann ein Instrument, wo ein langer Stabmagnet nach Coulombscher Weise so aufgehängt oder auf einer Spitze beweglich angebracht ist, dafs die Umdrehungsachse durch den einen Pol passiert. Dieser bleibt dadurch aufser Thätigkeit, und man beobachtet nur die Wirkung, welche der andere Pol erleidet. Weiter kann man nach dem Vorbilde des Oscillationsinstrumentes (Figuren 28b, c, d) ein auf einer Spitze bewegliches magnetisches Instrument bauen, wo ein kurzer Magnet je nach Belieben auf longitudinale, auf transversale oder auf drehende Beweglichkeit eingestellt werden kann. Dazu kommen noch als Aktionskörper teils ein langer Stabmagnet, welcher immer so benutzt wird, dafs nur sein einer Pol die Wirkung ausübt, teils endlich ein kurzer Magnet. Der Pol des Stabmagnets entspricht dann dem pulsierenden, der kurze Magnet dem oscillierenden Aktionskörper.

**69. Anziehung und Abstofsung pulsierender Körper.** — Bei der Anordnung Figur 30 stellen wir erst auf gleiche Pulsationen ein, so dafs sich die zwei Pulsationskörper gleichzeitig ausdehnen und gleich-

zeitig zusammenziehen. Nach der Regel (4) werden sie dann gleiche Vorzeichen haben; sie sind nach unseren theoretischen Resultaten mit gleichnamigen magnetischen Polen zu vergleichen und werden einander, zufolge des verkehrten Polgesetzes, anziehen.

Um dies zu prüfen, stellt man den Aktionskörper in der verlängerten Tangentenrichtung des beweglichen Körpers auf (Figur 31 a). Wird dann der Generator in Gang gesetzt, so sieht man, dafs sich der bewegliche Pulsationskörper sofort gegen den festen hin zu bewegen anfängt. Die Bewegung verläuft mit stark zunehmender Geschwindigkeit, bis sie bei der Berührung plötzlich aufhört. Ob die Pulsationstrommeln (Figur 18b, b′) die Membranen oder die cylindrischen Mantelflächen gegeneinander wenden, ist für den qualitativen Verlauf der Erscheinung ganz gleichgültig, die Anziehung verläuft in beiden Fällen mit genau derselben Präcision. Auch merkt man in qualitativer Hinsicht keinen Unterschied, wenn man Pulsationskörper anderer Formen, wie die ballonförmigen in Figur 18a oder die glockenförmigen in 18d benutzt.

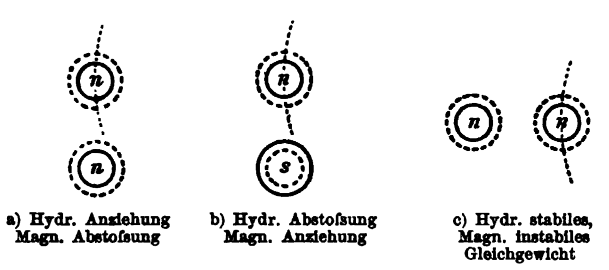



Fig. 31. Die Wirkungen zwischen pulsierenden Körpern oder zwischen magnetischen Polen.

Über die Intensität der Kraft wird das Folgende eine Vorstellung geben: Bei mittleren Schwingungszahlen von etwa 20 Schlägen in der Sekunde und bei mittleren Pulsationsamplituden von etwa 5 cm$^3$ tritt die Anziehung mit grofser Deutlichkeit innerhalb aller im Gefäfse zur Verfügung stehenden Abstände ein, wenn nur nicht die Anziehung nach einer Wand hin die Oberhand gewinnt (65). Wurde der als Aktionskörper dienende Pulsator erst in der Luft gehalten, bis die angegebene Betriebsgeschwindigkeit erreicht worden war, und dann plötzlich ins Wasser getaucht, so wurde der bewegliche Pulsationskörper bei 10 cm Abstand in weniger als 4 Sekunden, bei 20 cm Abstand in 12 bis 15 Sekunden bis zur Berührung angezogen.

Werden die gleichen Pulsationen zu entgegengesetzten gleicher

Intensität verändert, so geht die Anziehung momentan in ebenso kräftige Abstoſsung über (Figur 31 b). Diese Umschaltung kann man, ohne den Betrieb des Generators zu unterbrechen, dadurch bewerkstelligen, daſs man den Gummischlauch von der Röhre $R_1$ zu der Röhre $R_2$ derselben Pumpe $P$ (Figur 15) umschaltet. Die Abstoſsung führt immer zu dem Resultate, daſs der bewegliche Pulsationskörper nach einer Wand des Gefäſses hingetrieben wird, wo er wegen der Anziehung haften bleibt.

Kehrt man zu gleichen Pulsationen zurück und stellt den Aktionskörper etwas auſserhalb der Bahn des beweglichen Körpers auf, so bewegt sich der letztere zu der durch Figur 31 c veranschaulichten Lage des stabilen Gleichgewichtes hin, wo die Kraft senkrecht zu der Bahn steht. In derselben Lage hat der entsprechende magnetische Pol instabiles Gleichgewicht. Durch Umschaltung der Phase wird dagegen das Gleichgewicht des pulsierenden Körpers instabil, und das des entsprechenden magnetischen Poles stabil.

Zwischen der Anziehungs- und der Abstoſsungserscheinung erhält man einen stetigen Übergang, wenn man die Phase kontinuierlich ändert, was durch die in Figur 15 c im Schnitte dargestellte Vorrichtung geschieht. Bei dem Gangunterschiede von ein viertel Phase hat man weder Anziehung noch Abstoſsung. Durch Verschiebung in der einen Richtung erhält man Anziehung, durch Veränderung in der anderen Abstoſsung, und diese Kräfte erreichen ihre gröſsten Intensitäten bei gleicher, beziehungsweise entgegengesetzter Phase. Diese Versuche dürfen jedoch nicht bei zu kleinem Abstand zwischen den zwei pulsierenden Körpern angestellt werden. Denn es greifen dann die später zu untersuchenden temporären Energiekräfte störend ein.

**70. Genauere Analyse der scheinbaren Fernkraft.** — Die beschriebenen Erscheinungen machen auf einen Beobachter, welcher den Zusammenhang nicht kennt, vollständig den Eindruck von Wirkungen in die Ferne. Wenn die Pulsationen sehr schnell und mit kleinen Amplituden verlaufen, so sieht man sie nicht. Nur das Vorhandensein des Wassers und die Beobachtung, daſs die Wirkung bei dem Entfernen des Wassers ganz aufhört, oder jedenfalls so stark geschwächt wird, daſs sich die Wirkung der Grenze des Beobachtbaren nähert, wird zu der Vermutung führen, daſs eine durch das Wasser und nach dem Entfernen des Wassers durch die Luft vermittelte Fernwirkung vorliegt.

Diese Vermutung wird bestätigt, wenn der Versuch mit so lang-

samen Schlägen und so grofsen Amplituden wiederholt wird, dafs die Pulsationen sichtbar werden. Es zeigt sich nämlich dann, dafs die Anziehung und Abstofsung nicht eine in der Zeit unveränderliche, sondern eine rhythmische ist. Der Rhythmus folgt den Pulsationsschlägen und weist, selbst in den kleinsten Einzelheiten, die Eigentümlichkeiten auf, die wir nach der elementaren Ableitung (5) zu erwarten haben.

Für die Ausführung der Versuche mit ganz langsamen, aber grofsen Pulsationsschlägen sind keine der beschriebenen Instrumente ohne weiteres besonders geeignet. Bei den Instrumenten, wo Verlust an Luft bei dem Übergang zu dem beweglichen Instrumentteil stattfindet, ist es überhaupt nicht möglich, sehr langsame Pulsationsschläge zu erhalten, da dabei alle Luft verloren geht. Bei der Torsionswage andererseits treten starke Vertikaloscillationen ein. Man kann aber leicht dem vertikalen Arm, welcher zu dem Gewicht $G'$ geht (Figur 21), in zwei Ringen Führung geben, so dafs diese Oscillationen ausbleiben. Stellt man dann den Anziehungsversuch mit langsamen und grofsen Pulsationsschlägen an, so sieht man folgendes: Während der Ausdehnungsbewegung der zwei Körper entfernt sich der bewegliche etwas von dem festen. Während der Zusammenziehung dagegen nähert er sich, und zwar etwas stärker, als er sich früher entfernte. Bei dem Abstofsungsversuch sieht man andererseits, dafs sich der bewegliche Pulsationskörper zur Zeit seiner eigenen Ausdehnung und der Zusammenziehung des festen diesem nähert, zur Zeit seiner eigenen Zusammenziehung und der Ausdehnung des festen, von diesem entfernt, und zwar stärker, als er sich früher näherte. Da die Impulse, welche diese rhythmischen Bewegungen erzeugen, um ein viertel Phase früher als die Bewegungen kommen müssen, so schliefst man, dafs der bewegliche Körper bei kleinerem Volumen einen kleineren, bei gröfserem einen gröfseren Impuls erlitten hat, genau wie es nach unseren elementaren theoretischen Entwickelungen (5) sein mufste.

Diese kleinen rhythmischen Bewegungen, welche also den vollständigen Zusammenhang mit den theoretischen Ableitungen zeigen, kann man übrigens sehr einfach nachweisen, wenn man dafür sorgt, dafs keine Anziehung oder Abstofsung, sondern nur eine Oscillation der zwei Pulsationskörper um eine Gleichgewichtslage zu stande kommen kann. Man braucht dazu nur zwei gewöhnliche Pulsatoren nebeneinander pendelförmig aufzuhängen. Bei passend langsamen und passend starken Pulsationsschlägen zeigt sich dann, dafs die Pulsationskörper bei gleichen Pulsationen von- und gegeneinander, bei entgegengesetzten miteinander oscillieren. Diese Resultate traten

auch schon bei den ersten unvollkommenen Versuchen, wo Gummiballons mit den Lungen in Pulsationen gebracht wurden, schön und deutlich hervor,[1] während die Anziehung und Abstoſsung noch nicht mit Sicherheit nachgewiesen werden konnte.

Die rhythmischen Bewegungen stellen die Unabhängigkeit der totalen hydrodynamischen Fernkraft von dem Gegenwirkungsprinzipe, welche die Theorie ergeben hat (I, 173—181), in vollem Lichte klar. Man schlieſst aus diesen Bewegungen sofort, daſs bei dem Anziehungsversuche Wirkung und Gegenwirkung entgegengesetzt-, bei dem Abstoſsungsversuche dagegen gleichgerichtet sind. Der fundamentale Unterschied, welcher somit besteht zwischen den Eigenschaften, welche die hydrodynamischen Fernkräfte haben, und denjenigen, welche wir den bekannten Fernkräften der Natur beilegen, verbirgt sich aber vollständig, wenn wir zu kleinen und schnellen Pulsationsschlägen übergehen. Man merkt dann nur die progressiven Bewegungen, welche auf der schwachen Asymmetrie der kleinen Schwingungen beruhen, und für die Durchschnittskraft, auf welche wir diese progressive Bewegung zurückgeführt haben, ist nach der Theorie das Gegenwirkungsprinzip gültig (I, 174). Man kann es auch leicht verificieren mit all der Genauigkeit, welche unsere Instrumente geben können, wenn man nämlich zwei Pulsationswagen in solcher Weise verbindet, daſs der Abstand zwischen den Pulsationstrommeln konstant gehalten wird, während doch beide zugleich beweglich bleiben. Man wird dann keine Bewegung des gesamten Systems erhalten, vorausgesetzt, daſs keine der Pulsationswagen aus irgend einer der früher behandelten Ursachen (62, 65, 66) Tendenz zu Eigenbewegung besitzt.

**71. Die Wirkung einer oscillierenden Aktionskugel auf einen pulsierenden Körper.** — Die Anzahl der charakteristischen Versuche vergröſsert sich sehr, wenn der eine Pulsator durch einen Oscillator ersetzt wird. Der Umtausch kann in zweierlei Weise geschehen, und zwar werden wir die oscillierende Kugel zunächst als Aktionskörper einführen, während der bewegliche Körper ein pulsierender bleibt.

Zur Diskussion der Versuche definieren wir die Pole nach der Regel (4) und wählen als Anfangszeit eine solche, zu welcher sich der pulsierende Körper ausdehnt. Dieser wird dann positiv und

[1] C. A. Bjerknes, Forelöbige Meddelelser etc. Videnskabsselskabets Forhandlinger, Christiania 1875, S. 398.

die Fortschreitungsrichtung, welche die oscillierende Kugel zu derselben Zeit hat, giebt die positive Richtung ihrer Achse an.

Wir stellen zunächst die oscillierende Kugel in der verlängerten Tangentenrichtung der Bahn des pulsierenden Körpers auf, und so, daſs sie longitudinale Oscillationen gegen die Pulsationen ausführt (vergl. 9, S. 18). Es tritt dann Anziehung ein (Figur 32a). Der pulsierende Körper nähert sich der oscillierenden Kugel mit rasch zunehmender Geschwindigkeit, bis die Bewegung bei der Berührung plötzlich aufhört, oder bis ein Fortschleudern wegen des Zusammenstoſses erfolgt. Nach den Zeiten zu urteilen, die zur Anziehung aus verschiedenen Abständen bis zur Berührung nötig sind, hat die Kraft innerhalb der Abstände, welche im Aquarium zur Verfügung stehen, ungefähr dieselbe Intensität, wie die Kraft zwischen zwei pulsierenden Körpern, gleiche Intensität des Generatorbetriebes vorausgesetzt.

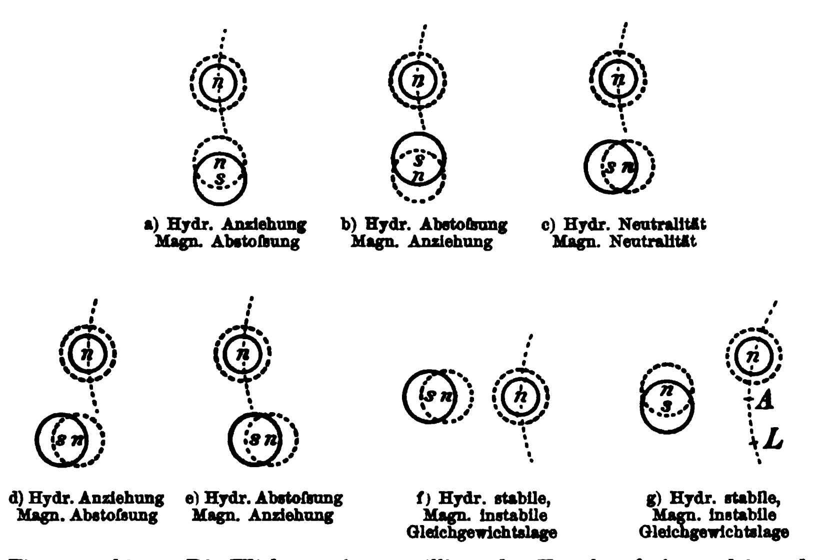



Fig. 32, a bis g. Die Wirkung einer oscillierenden Kugel auf eine pulsierende, oder eines Magnets auf einen magnetischen Pol.

Dreht man den Oscillator plötzlich um, so daſs die Oscillationen mit den Pulsationen verlaufen, so verändert sich die Anziehung zu einer ebenso intensiven Abstoſsung (Figur 32b). Dem pulsierenden Körper gegenüber hat also wirklich die oscillierende Kugel, wie es die Theorie verlangt, einen anziehenden und einen abstoſsenden Pol. Sie verhält sich genau wie ein Magnet, der nur nach dem verkehrten Polgesetze wirkt.

Die Analogie mit dem Magnet tritt in allen Einzelheiten hervor. Zwischen den Lagen a der gröſsten Anziehung und b der gröſsten Abstoſsung erhält man einen stetigen Übergang, wenn man den Oscillator um eine vertikale Achse dreht. Die Neutralität tritt in dem hydrodynamischen wie im magnetischen Falle bei der transversalen Lage c ein. Hier steht die Kraft, welche der bewegliche Körper erleidet, auf seiner Bahn senkrecht. Von dieser Neutralitätslage c aus kann man die oscillierende Kugel, beziehungsweise den Magnet, seitlich verschieben. Die Verschiebung nach der einen Seite d führt im hydrodynamischen Falle zu Anziehung, im magnetischen zu Abstoſsung, die Verschiebung nach der anderen e im hydrodynamischen Falle zu Abstoſsung, im magnetischen dagegen zu Anziehung. Es ist lehrreich, diese Versuche mit dem Felde zu vergleichen, mit dem sich die oscillierende Kugel oder der Magnet umgiebt (vergl. Figur 7, S. 51 des I. Bandes und Figur 53a unten). Man sieht dann, daſs sich die pulsierende Kugel immer in der Richtung der Stromlinien zu bewegen sucht, wie der Pol in der Richtung der Kraftlinien, sofern diese Bewegung nicht anderweitig gehindert ist.

Wenn man im Falle d die oscillierende Kugel hinlänglich weit nach der Seite verschiebt, so wird der pulsierende Körper von der anziehenden Kraft nach der Gleichgewichtslage f getrieben. Dreht man aber dann die oscillierende Kugel um einen rechten Winkel, so hört das Gleichgewicht auf. Denn es tritt die durch Figur 6c (S. 17) veranschaulichte, seitlich verschiebende Kraft in Thätigkeit. Die pulsierende Kugel wird nach der Seite geschoben, aber nur eine kurze Strecke. In der durch g dargestellten schiefen Lage kommt sie nach einigen Schwingungen ins Gleichgewicht. Denn hier steht jetzt die Bahn senkrecht zu den Stromlinien des Feldes, welches die oscillierende Kugel erzeugt. Symmetrisch zu der Ausgangslage $A$ findet man noch eine Lage $L$, wo dieselbe Bedingung erfüllt ist. Hier ist aber das Gleichgewicht instabil. Wird die pulsierende Kugel von der stabilen Lage aus bis in die Nähe von $L$ gebracht, so wird sie sofort kräftig gegen die stabile Lage zurückgetrieben. Wird sie dagegen etwas an $L$ vorbeigeführt und dann losgelassen, so wird sie in derselben Richtung weiter getrieben, und würde auf dem gröſseren Bogen des Kreises nach der stabilen Lage zurückkehren, wenn es die äuſseren Bedingungen gestatteten.

Wenn man den entsprechenden magnetischen Versuch ausführt, so beobachtet man identisch dieselben Bewegungen, nur daſs, als Folge des verkehrten Polgesetzes, die Lage des stabilen und die des labilen Gleichgewichtes miteinander vertauscht sind.

**72. Die Äquivalenz einer oscillierenden Kugel mit einem pulsierenden Kugelpaar.** — Eine theoretische Diskussion der beschriebenen Versuche würde zeigen, daſs eine oscillierende Kugel, was die Fernwirkungen betrifft, mit zwei zusammengekoppelten Kugeln, welche mit gleicher Intensität entgegengesetzte Pulsationen ausführen, gleichwertig sein muſs. Dasselbe läſst sich aber auch durch das Experiment zeigen. Man bindet dann zwei Pulsatoren zusammen und verbindet den einen mit der einen, den anderen mit der anderen Ausfluſsröhre einer und derselben Generatorpumpe (Figur 15). Die zwei Pulsatoren nehmen dann genau entgegengesetzte und genau gleich starke Oscillationen an. Die zwei zusammengekoppelten Pulsatoren kann man frei in der Hand führen, genau wie den Oscillator, und relativ zu dem beweglichen pulsierenden Körper in alle Lagen bringen, welche für den Fall der oscillierenden Kugel durch die Figuren 32 illustriert sind. Die Versuche verlaufen ganz analog. Ein Unterschied in den Fernwirkungen der oscillierenden Kugel und der zwei Pulsatoren ist überhaupt nicht zu entdecken.

**73. Die Wirkung eines pulsierenden Aktionskörpers auf eine oscillierende Kugel.** — Wir kehren wieder von dem Doppelpulsator zu dem Oscillator zurück und ändern die Versuchsanordnung dadurch ab, daſs wir den Oscillator in das bewegliche Instrument einschalten, während der Pulsator als Aktionskörper benutzt wird. Die Versuche geben dann die Gegenwirkungen zu den eben studierten Wirkungen. Die wichtigsten Resultate sind durch die Figuren 33 veranschaulicht. Der gestrichelte Kreisbogen giebt die Bahn, welche die oscillierende Kugel durchlaufen kann, und der Vergleich der Tangentenrichtung dieser Bahn mit der Oscillationsachse der Kugel zeigt in jedem Falle die Natur ihrer Bewegungsfreiheit an.

Wir stellen zunächst auf den Fall der longitudinalen Beweglichkeit (Figur 28b) ein. Bringt man dann den pulsierenden Körper in der Verlängerung der Oscillationsachse an (Figur 33a und b), so ergeben sich die Gegenwirkungen zu den durch Figur 32a und b dargestellten Wirkungen. Wird der positiv pulsierende Körper in die positive Verlängerung der Oscillationsachse gebracht, so tritt Anziehung ein (a). Hinter der Kugel dagegen, in der negativen Verlängerung der Oscillationsachse, erfolgt Abstoſsung (b). Der pulsierende Körper wird also die oscillierende Kugel in ein und derselben Richtung in ihrer Bahn herumtreiben, sei es, daſs er sich vor oder hinter ihr befindet. Genau ebenso wirkt ein Magnetpol auf einen longitudinal beweglichen Magnet, nur daſs die Umlaufsrichtung die entgegengesetzte wird.

Bringt man den pulsierenden Körper in der Verlängerung des Armes der Oscillationswage an, so wird die oscillierende Kugel nicht in ihrer Ausgangslage $A$ (Figur 33c) bleiben können. Es tritt die seitlich verschiebende Kraft auf, welche die Gegenwirkung zu der durch Figur 32g dargestellten Wirkung ist. Die oscillierende Kugel wird auf die Seite getrieben, um nach einigen Schwingungen in einer schiefen Lage ins Gleichgewicht zu kommen. Symmetrisch zu dieser

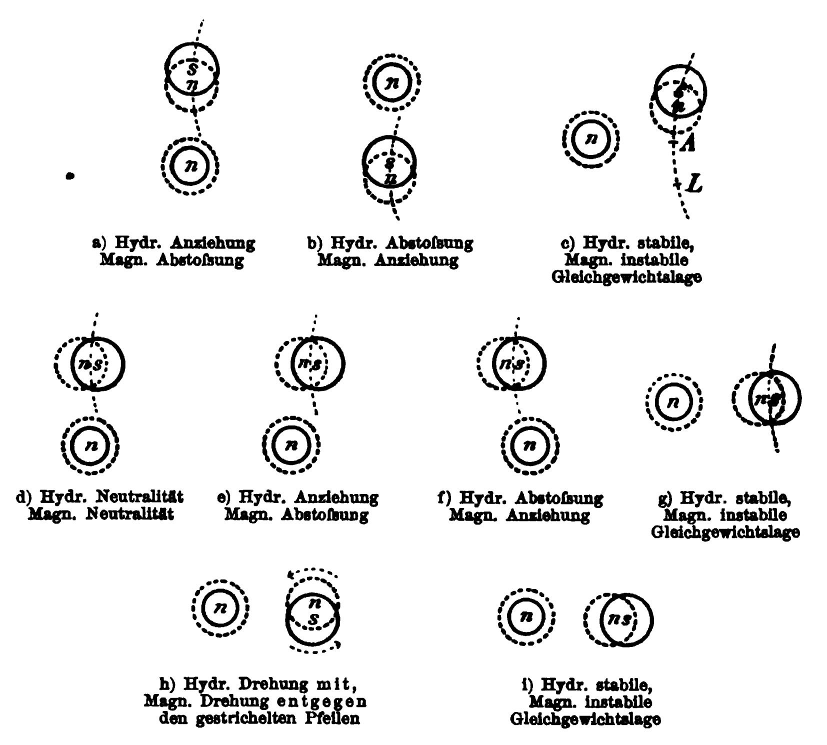



Fig. 33, a bis i. Die Wirkung eines pulsierenden Körpers auf eine oscillierende Kugel, oder eines Magnetpols auf einen Magnet.

Lage des stabilen Gleichgewichtes findet man in $L$ eine Lage des instabilen Gleichgewichtes. Macht man den Versuch mit einem Magnetpol und einem longitudinal beweglichen Magnet, so findet man die genau gleichen, nur entgegengesetzt gerichteten Verschiebungen, so daſs die Lage, welche im hydrodynamischen Falle die stabile war, im magnetischen die instabile wird, und umgekehrt.

Stellt man die oscillierende Kugel auf transversale Beweglichkeit ein (Figur 28c), so herrscht Neutralität, wenn der pulsierende Körper in die verlängerte Tangentenrichtung der Bahn der Kugel

gebracht wird (Figur 33d). Die kleinste Verschiebung von dieser Lage aus nach der einen Seite (e) giebt Anziehung und nach der anderen (f) Abstoſsung, Gegenwirkungen zu den durch Figur 32d und e dargestellten Wirkungen. Wenn man im ersten Falle den pulsierenden Körper hinlänglich weit nach der Seite verschiebt, so führt die Anziehung zu der durch g gegebenen symmetrischen Gleichgewichtslage, welche der früheren 32f entspricht.

Schlieſslich kann die oscillierende Kugel auf drehende Beweglichkeit (Figur 28d) eingestellt werden. In dem Falle (Figur 33h), wo die Oscillationen transversal verlaufen, wird die oscillierende Kugel von dem Kräftepaar angegriffen, welches durch die gestrichelten Pfeile dargestellt ist. Unter der Wirkung derselben dreht sie sich wie eine Kompaſsnadel gegen die Lage hin, wo sie relativ zu dem pulsierenden Körper longitudinal oscilliert (Figur 33i). Wegen der Trägheit geht sie an der Gleichgewichtslage vorbei, kommt aber nach einigen Schwingungen um dieselbe zur Ruhe. Dreht man die oscillierende Kugel von dieser Gleichgewichtslage aus um 180°, so kommt sie in eine Lage instabilen Gleichgewichtes. Bei der kleinsten Störung wird sie diese Lage verlassen, um wieder, je nach den Umständen, auf dem einen oder dem anderen der zwei Wege zu der Lage des stabilen Gleichgewichtes zurückzueilen.

Wenn man sorgfältig die besten Versuchsbedingungen aussucht, so daſs die früher behandelten Fehler möglichst zurücktreten, so wird diese Drehung in allen Abständen eintreten, die in dem Gefäſse zur Verfügung stehen. Über die Intensität der Kraft giebt das Folgende eine Vorstellung: wenn man denselben Generatorbetrieb benutzt, den wir früher bei ähnlichen Angaben voraussetzten (69), so beträgt die Zeit für die Schwingung der Kugel von der einen Umkehrlage zu der anderen (also die Zeit einer halben Schwingung) etwa 8 Sekunden, wenn man den kleinsten Abstand benutzt, der in Frage kommen kann, ohne daſs man Zusammenstöſse zu fürchten hat.

**74. Die Wirkung einer oscillierenden Kugel auf eine andere, welche longitudinale Beweglichkeit hat.** — Während wir eine oscillierende Kugel als die bewegliche beibehalten, können wir auch als Aktionskörper anstatt der pulsierenden eine oscillierende Kugel einführen.

Nach der Definition (4) hat man diejenigen Kugelhäften, welche zu einer gewählten Anfangszeit vorausgehen, als die positiven, die die zu dieser Zeit nachfolgenden als die negativen zu definieren. Natürlich richtet man, zur Erleichterung des Überblickes, die Ver-

bindungen so ein, daſs gleichgefärbte Halbkugeln gleichnamigen Polen entsprechen.

Die bewegliche Kugel stellen wir zunächst auf die longitudinale Beweglichkeit ein. Die Hauptresultate in diesem Falle sind durch die Figuren 34 veranschaulicht.

Erst bringen wir die Aktionskugel in der verlängerten Achse der beweglichen an. Wenn dann auch die Aktionskugel auf longitudinale Oscillationen eingestellt wird, so ergiebt sich bei Oscillationen der Kugeln gegeneinander (Figur 34a) eine rasche Anziehung. Diese

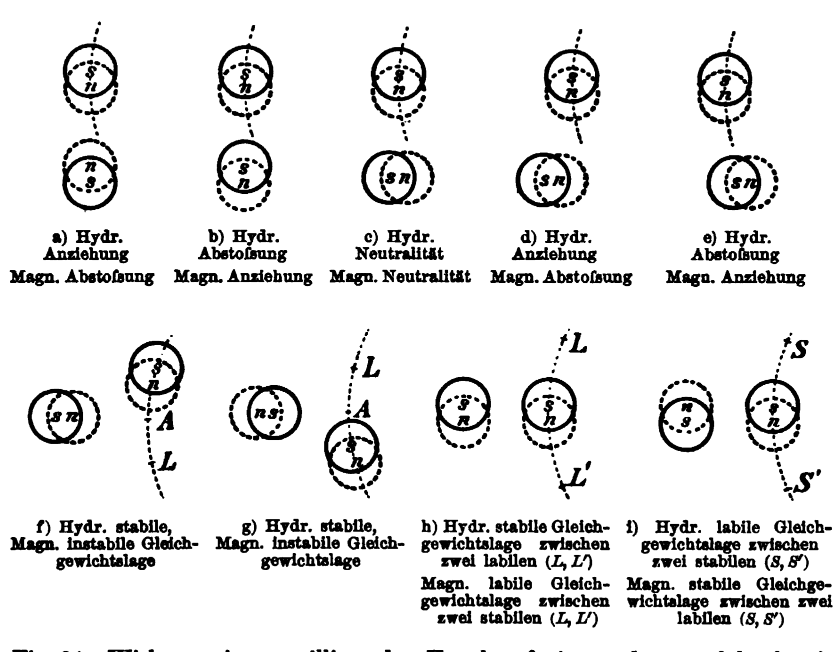



Fig. 34. Wirkung einer oscillierenden Kugel auf eine andere, welche longitudinale Beweglichkeit hat, bezw. eines Magnets auf einen longitudinal beweglichen Magnet.

führt bald zu einem Zusammenstoſse, durch welchen die bewegliche Kugel heftig fortgeschleudert wird, um dann wieder angezogen zu werden, sofern sie sich nicht so weit entfernt hatte, daſs sie unter den Einfluſs der Anziehung nach den Wänden gekommen ist. Dreht man die Aktionskugel um 180°, daſs sie der beweglichen ihren anderen Pol darbietet, so tritt Abstoſsung ein, welche, wenn man es nicht künstlich verhindert, immer zur Folge hat, daſs die bewegliche Kugel schlieſslich in Bereiche kommt, wo die Anziehung einer Wand die Oberhand gewinnt.

Was die Intensität dieser Anziehungs- und Abstofsungskräfte betrifft, welche die stärksten sind, denen man bei oscillierenden Kugeln begegnet, so findet man leicht folgendes: In den Abständen, welche innerhalb des Gefäſses zur Verfügung stehen, haben sie ähnliche Intensitäten wie diejenigen, welche zwischen zwei pulsierenden Körpern, oder zwischen einem pulsierenden und einem oscillierenden Körper auftreten, gleichen Betrieb des Generators vorausgesetzt. Genauere Beobachtungen über die Zeiten, welche von dem Anfang der Bewegung bis zu dem Zusammenstofs der Kugeln verlaufen, und über die Zunahme der Geschwindigkeit mit zunehmender Annäherung lassen jedoch auch deutlich erkennen, dafs die Kräfte in hinlänglich kleinen Abständen gröfser, in hinlänglich grofsen dagegen kleiner als im Falle zweier pulsierender Kugeln sind, und dies stimmt mit dem durch die Theorie gefundenen höheren Abstandsgesetze überein.

Zwischen den betrachteten Fällen der stärksten Anziehung und der stärksten Abstofsung hat man einen stetigen Übergang, wenn man die Aktionskugel langsam um ihre Achse dreht. In der Lage wie Figur 34c herrscht Neutralität. Die kleinste Drehung von dieser Lage aus in der einen Richtung giebt Anziehung, die kleinste Drehung in der entgegengesetzten führt zu Abstofsung. Von der neutralen Lage aus kann man auch die Aktionskugel nach der Seite verschieben. Die eine Verschiebung (Figur 34d) giebt dann Anziehung, die andere (e) Abstofsung, alles genau, als wären die oscillierenden Kugeln Magnete, die nur nach dem entgegengesetzten Polgesetze wirken.

Wir können weiter die Aktionskugel in der Verlängerung des Armes der Oscillationswage aufstellen, und zunächst so, dafs sie längs der Richtung dieses Armes oscilliert. Die Ausgangslage ist dann die longitudinal-transversale, und die transversal schwingende Kugel hat longitudinale Beweglichkeit. Die Kraft, welche sich geltend machen wird, ist dann die seitlich verschiebende, welche in der Figur 7f (S. 18) die transversal schwingende Kugel angreift. Diese Kugel wird bei dem Versuche nach der Seite getrieben und nimmt nach einigen Schwingungen die in der Figur 34f veranschaulichte Lage ein, wo sie stabiles Gleichgewicht hat. In der symmetrisch entsprechenden Lage $L$ herrscht dagegen instabiles Gleichgewicht. Alles verläuft bei diesem Versuche, als wäre die Aktionskugel pulsierend (vergl. Figur 33c). Dies beruht natürlich darauf, dafs hauptsächlich nur der eine Pol der oscillierenden Kugel in Thätigkeit ist. Dreht man sie aber um 180°, so kommt der andere Pol in Thätigkeit, und die Kraft, welche die bewegliche Kugel erleidet, wird die

entgegengesetzte. Die stabile Gleichgewichtslage tritt dann dort auf, wo früher die instabile war, und umgekehrt (Figur 34g).

Ein noch komplicierteres System von Gleichgewichtslagen findet man, wenn man den feststehenden Oscillator um nur 90° dreht, so dafs die zwei Kugeln in der Ausgangslage parallel-transversale Oscillatione ausführen. Die Ausgangslage selbst ist dann eine Gleichgewichtslage, und zwar eine stabile, wenn die Kugeln miteinander oscillieren (Figur 34h), dagegen eine instabile, wenn sie gegeneinander oscillieren (Figur 34i). Auf jeder Seite dieser Gleichgewichtslage findet man wieder eine Gleichgewichtslage. Diese sind labil ($L, L'$), wenn die centrale Gleichgewichtslage eine stabile war, und stabil ($S, S'$), wenn die centrale Gleichgewichtslage eine instabile war. Alle diese Gleichgewichtslagen findet man genau wieder, wenn man den entsprechenden magnetischen Versuch ausführt, nur immer mit der entgegengesetzten Kraftrichtung, und dem dabei folgenden Umtausch der stabilen und der instabilen Gleichgewichtslagen.

**75. Die Wirkung einer oscillierenden Kugel auf eine andere, welche transversale Beweglichkeit hat.** — Wir stellen jetzt die bewegliche oscillierende Kugel auf transversale Beweglichkeit ein (Figur 28c). Der erste Versuch wird dann die einfache Anziehung im Falle der parallel-transversalen Oscillationen miteinander zeigen (Figur 35a). Man sieht leicht schon bei dem qualitativen Versuche, dafs die Kraft etwas kleinere Intensität hat, als im Falle der longitudinalen Oscillationen, was mit den Formeln [**17** ($f_1$) und ($f_2$)] übereinstimmt. Auch insofern hat man einen Unterschied im äufseren Verlauf der Erscheinung zu notieren, als der Zusammenstofs, wegen der veränderten Richtung der Oscillationen, weniger heftig ist und nicht ein vollständiges Wegschleudern der beweglichen Kugel zur Folge hat. Kehrt man die Aktionskugel um, so dafs die zwei Kugeln parallel-transversale Oscillationen gegeneinander ausführen, so geht die Anziehung in ebenso kräftige Abstofsung über (Figur 35b).

Zwischen den Fällen der gröfsten Anziehung und der gröfsten Abstofsung erhält man wieder einen stetigen Übergang, wenn man die Aktionskugel um ihre Achse dreht. Die Neutralität tritt in der longitudinal-transversalen Lage (Figur 35c) ein. Hier steht die Kraft senkrecht zu der Bahn, welche die bewegliche Kugel durchlaufen kann, wie der Vergleich mit der Figur 7e und f (S. 18) zeigt. Wenn man von dieser Lage aus die Aktionskugel seitlich verschiebt, so erhält man auf der einen Seite Anziehung und auf der anderen Abstofsung (Figur 35d und e). Wenn man andererseits diese seitliche

Verschiebung von der Anziehungslage a aus ausführt, so giebt die Verschiebung nach der einen Seite oder nach der anderen ein und dasselbe Resultat: die Anziehung nimmt rasch ab und geht, wenn die Verschiebung hinlänglich grofs geworden ist, in Abstofsung über (Figur 35f und g). Geht man von der Abstofsungslage b aus, so findet man ganz entsprechend, dafs die Abstofsung rasch abnimmt,

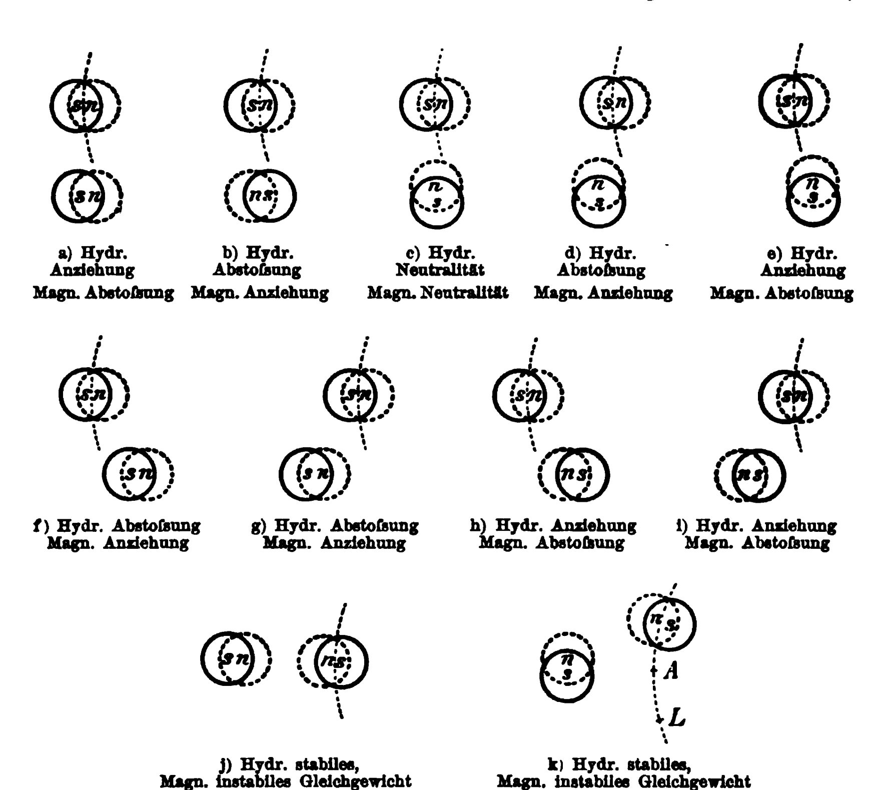


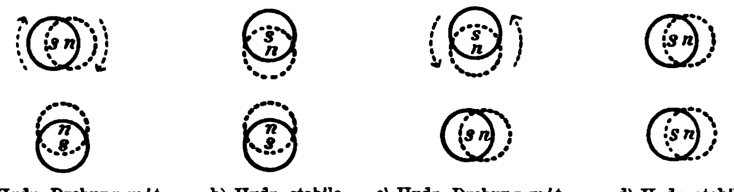

Fig. 35. Wirkung einer oscillierenden Kugel auf eine andere, bezw. eines Magnets auf einen andern mit transversaler Beweglichkeit.

um in Anziehung überzugehen (h und i), sobald dieselbe kritische Lage überschritten ist. Dieses gehört wieder zu den komplicierteren Versuchen, welche vorzüglich geeignet sind, die Vollständigkeit der Analogie mit dem Magnetismus hervortreten zu lassen, wenn man die entsprechenden magnetischen Versuche neben den hydrodynamischen ausführt.

Wir können nun weiter die Aktionskugel in den verlängerten Arm der Oscillationswage bringen. Lassen wir sie hier longitudinal oscillieren, so wird die bewegliche, longitudinal oscillierende, aber

transversal bewegliche Kugel im Gleichgewichte sein, und zwar im Falle j, wo die Kugeln gegeneinander oscillieren, in stabilem. Dreht man aber die Aktionskugel um 180°, so wird das Gleichgewicht instabil. Dreht man nur um 90°, so wird die bewegliche Kugel nicht in $A$ (Figur 35k) bleiben können. Sie wird nach der Seite verschoben und kommt in der oft erwähnten schiefen Lage in stabiles Gleichgewicht. Die dabei auftretende Kraft ist die Gegenwirkung zu der durch Figur 34f dargestellten Wirkung. In der Lage $L$ hat man das entsprechende labile Gleichgewicht. Die Drehung der Aktionskugel um 180° hat die Umkehr der Richtung der Kraft in jede Lage, und damit den Umtausch der stabilen und der labilen Gleichgewichtslage zur Folge.

**76. Die Wirkung einer oscillierenden Kugel auf eine andere, welche die drehende Beweglichkeit hat.** — Schliefslich stellen wir die bewegliche oscillierende Kugel auf drehende Beweglichkeit ein (Figur 28d). Wir können zuerst eine Ausgangslage wählen, bei der die bewegliche Kugel transversal, die Aktionskugel dagegen longitudinal oscilliert. Dann tritt das Drehungsmoment in Wirksamkeit,



a) Hydr. Drehung mit, Magn. Drehung entgegen den gestrichelten Pfeilen — b) Hydr. stabile, Magn. instabile Gleichgewichtslage — c) Hydr. Drehung mit, Magn. Drehung entgegen den gestrichelten Pfeilen — d) Hydr. stabile, Magn. instabile Gleichgewichtslage

Fig. 36. Drehende Wirkung einer oscillierenden Kugel auf eine andere, bezw. eines Magnets auf einen andern.

welches in Figur 7e (S. 18) die transversal schwingende Kugel angreift. Unter der Wirkung desselben erfolgt eine schnelle Drehung der beweglichen Kugel in der Richtung, welche die gestrichelten Pfeile Figur 36a angeben. Die Drehung überschreitet wegen der Trägheit die Gleichgewichtslage und nach einigen Schwingungen tritt Ruhe ein in der Lage, wo die Kugeln longitudinale Oscillationen gegeneinander ausführen (Figur 36b).

Als zweite Ausgangslage können wir die wählen, wo die drehbare Kugel longitudinal, die Aktionskugel dagegen transversal oscilliert (Figur 36c). Das Drehungsmoment, welches dabei auftritt, ist das, welches in der Figur 7f (S. 18) die longitudinal schwingende

Kugel angreift. Bei dem Versuche sieht man auch sofort, dafs sich die Kugel in der Richtung dreht, welche dieses Kräftepaar angiebt. Nach einigen Schwingungen kommt sie in stabiles Gleichgewicht in der Lage, wo die zwei Kugeln parallel-transversale Oscillationen miteinander ausführen.

Geht man von einer der angegebenen Gleichgewichtslagen aus und dreht die Aktionskugel langsam, so wird jeder Drehung der Aktionskugel eine entsprechende der beweglichen Kugel folgen. Beobachtet man alle diese Gleichgewichtslagen und vergleicht sie mit dem Stromfeld der oscillierenden Kugel (Figur 7, S. 51 des I. Bandes oder Figur 53a unten), so wird man sehen, dafs die bewegliche Kugel dann im Gleichgewichte ist, wenn sie sich mit ihrer Oscillationsachse tangential zu den Stromlinien des Feldes der Aktionskugel eingestellt hat. Man findet die allerauffälligste Übereinstimmung mit der Bewegung einer Kompafsnadel in dem entsprechenden magnetischen Felde (Figur 53b). Nur das Polgesetz ist wie immer das verkehrte.

Wenn der Oscillator hinlänglich lange Zuleitungsröhren hat, so kann man die oscillierende Aktionskugel auch unter der drehbaren anbringen, indem man die Zuleitungsröhren in schiefer Lage in der Hand hält. In der normal-transversalen Lage werden sich die Oscillationsachsen der zwei Kugeln, von oben gesehen, wie die zwei in Figur 37 gezeichneten, einander kreuzenden Pfeile projizieren. Nach der Theorie soll dann ein Drehungsmoment in Thätigkeit treten, welches die Kugeln um ihre gemeinschaftliche Verbindungslinie als Achse zu drehen sucht. Die danach zu erwartende Drehung tritt bei dem Versuche auch sofort ein und führt zu der Lage, wo die zwei Kugeln parallel-transversale Oscillationen miteinander ausführen. Nach einigen Schwingungen kommt die Kugel in dieser Lage zur Ruhe.

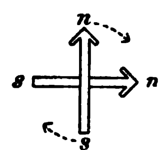


Fig. 37. Hydr. Drehung mit, Magn. Drehung entgegen den gestrichelten Pfeilen.

In qualitativer Beziehung sind jetzt sämtliche theoretisch vorausgesagten Kräfte anziehender, abstofsender, seitlich verschiebender oder drehender Natur nachgewiesen und in vollkommener Übereinstimmung mit den Forderungen der Theorie gefunden.

# Achter Abschnitt.

## Einige messende Versuche.

**77. Die Bedeutung der messenden Versuche.** — In der großen Mannigfaltigkeit der beschriebenen qualitativen Versuche hat sich kein einziges Zeichen der Nichtübereinstimmung mit der Theorie gezeigt. Im großen und ganzen war dies auch zu erwarten, nachdem wir gefunden hatten, daſs die tumultuarischen Wasserbewegungen, welche in der Hydrodynamik solchen Nichtübereinstimmungen meistens zu Grunde liegen, bei den Versuchen ganz in den Hintergrund treten (67). Man wird auch nicht zweifeln können, daſs die umfassenden Übereinstimmungen in qualitativer Hinsicht auf ausgedehnten quantitativen Übereinstimmungen beruhen müssen. Es wird aber Interesse haben, dies auch direkt zu konstatieren, selbst wenn die Messungen, die wir anstellen können, noch ziemlich unvollkommen sind.

Aber neben diesem ersten Ziele, die Übereinstimmung zwischen Theorie und Erfahrung zu prüfen, haben die messenden Versuche noch ein zweites. Denn wenn es gelingt, sie befriedigend auszuführen, so ist damit ein neuer, von allen mathematischen Deduktionen freier Eingang zu dem Studium der hydrodynamischen Fernkräfteerscheinungen gegeben. Sie können dann in genau derselben Weise wie die elektrischen und magnetischen studiert werden, und man wird das ganze Lehrgebäude der Elektrostatik und des Magnetismus einerseits, das der hydrodynamischen Fernkräfteerscheinungen andererseits in genau identischer Weise auf genau einander entsprechenden Versuchen und durch genau einander entsprechende Schluſsfolgerungen aufbauen.

Sämtliche folgende Messungen beziehen sich auf die Anziehung und die Abstoſsung von pulsierenden Körpern, und entsprechen insofern den elektrischen und magnetischen Fundamentalversuchen mit der Coulomb'schen Torsionswage.

**78. Versuchsanordnung und Vorversuche.** — Durchgehend kommt im folgenden die Torsionswage Figur 21 mit eingefügtem Pulsator von der Form Figur 18a zur Anwendung. Dem ballonförmigen Pulsationskörper wird der Vorzug gegeben, teils weil er sich der Kugelform nähert, teils und vornehmlich aber, weil er weniger starke Ströme als der trommelförmige erzeugt. Nur dann finden sich

stärkere und enger begrenzte Flüssigkeitsstrahlen, wenn der Ballon unsymmetrische Schwingungen ausführt.

Als Generator wird der in Figur 16 abgebildete benutzt. Bei gewissen Versuchen, wo die während einer zusammenhängenden Reihe vorzunehmenden Abänderungen keinen veränderlichen Widerstand gegen den Generatorbetrieb zur Folge haben, braucht man nur die HUYGHENS'schen Gewichte $G$ und $G'$ ohne die Kette zu benutzen. In anderen Fällen ist aber der Widerstand veränderlich und der Generator wird dann mit angehängter Kette und mit dem Geschwindigkeitsindikator (Figur 17) benutzt.

Dem Zeiger $z$ der Torsionswage (Figur 21) gegenüber wird ein anderer Zeiger fest aufgestellt, so dafs man schon sehr kleine Änderungen in der Gleichgewichtslage sehen kann. Bei einem ersten Vorversuche wird nachgesehen, ob sich die Gleichgewichtslage bei dem Ingangsetzen des Generators verschiebt. Ein Unterschied zwischen der „statischen" und der „dynamischen" Gleichgewichtslage wird immer vorhanden sein, wenn als Folge von unsymmetrischen Pulsationen eine Reaktionswirkung auftritt (**66**). Zeigt sich ein grofser Fehler dieser Art, beispielsweise bis zu 10 oder 20 Prozent der mittleren Ausschläge, welche man bei den eigentlichen Versuchen zu messen hat, so mufs man die Ursache möglichst zu beseitigen suchen. Ist aber der Unterschied klein, so braucht man nur alle Ablesungen auf die dynamische, anstatt auf die statische Gleichgewichtslage als Ausgangslage zu beziehen. Dies wurde bei den folgenden Messungen durchgehend gethan.

**79. Verschiebung der Phase.** — Die Hauptversuche, wo die Analogie mit den elektrischen und magnetischen Erscheinungen hervortritt, werden immer bei Synchronismus, das heifst bei gleicher oder entgegengesetzter Phase ausgeführt. Es ist aber wichtig, vorher den allgemeineren Fall des Isochronismus, wo der Phasenunterschied beliebig verändert wird, zu untersuchen.

Auf jedem Ringe des Generators hat man dann nur eine Trommel. Die eine läfst man in Ruhe, und die andere verschiebt man um den ganzen Ring herum, was ohne jede Unterbrechung des Betriebes geschehen kann. Diese Verschiebung hat keinen veränderten Widerstand zur Folge, und man kann den Generator ohne Kette und Geschwindigkeitsindikator anwenden. Nur mufs man genau nachsehen, dafs der stationäre Geschwindigkeitszustand erreicht ist, ehe man die Versuchsreihe anfängt. Für jede Einstellung der verschobenen Trommel wird die Verdrehung an der geteilten Scheibe der Torsions-

wage abgelesen, welche notwendig ist, um die Torsionswage zu der „dynamischen“ Gleichgewichtslage zurückzubringen.

Die folgende Tabelle enthält das Resultat zweier Versuchsreihen, deren eine bei 15,1 und die andere bei 10,4 cm Centralabstand zwischen dem beweglichen Körper und dem Aktionskörper erhalten sind. Die erste Zeile enthält die Phasenunterschiede, auf welche eingestellt worden ist, und die zwei folgenden geben in Graden die abgelesenen Verdrehungen. Diese Zahlen geben ein relatives Mafs der in jedem Falle thätig gewesenen Kraft ab. Das Vorzeichen + bedeutet Abstofsung, und das Vorzeichen − Anziehung.

| Abstand | Phasenunterschied | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | $\frac{1}{16}$ | $\frac{2}{16}$ | $\frac{3}{16}$ | $\frac{4}{16}$ | $\frac{5}{16}$ | $\frac{6}{16}$ | $\frac{7}{16}$ | $\frac{8}{16}$ |
| 15,1 cm | −2,8 | −2,6 | −1,8 | −0,8 | +0,1 | +1,1 | +2,0 | +2,6 | +2,6 |
| 10,4 cm | −7,8 | −7,3 | −5,8 | −3,3 | −0,5 | +2,2 | +4,4 | +6,2 | +7,1 |

| Abstand | Phasenunterschied | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\frac{8}{16}$ | $\frac{9}{16}$ | $\frac{10}{16}$ | $\frac{11}{16}$ | $\frac{12}{16}$ | $\frac{13}{16}$ | $\frac{14}{16}$ | $\frac{15}{16}$ | 0 |
| 15,1 cm | +2,6 | +2,5 | +2,1 | +1,1 | +0,1 | −0,9 | −1,8 | −2,6 | −2,8 |
| 10,4 cm | +7,1 | +6,5 | +5,2 | +3,0 | +0,3 | −2,8 | −5,1 | −7,1 | −7,8 |

Die Zahlen dieser Tabelle zeigen also, wie die Kraft bei stetiger Phasenverschiebung ihre Intensität verändert. Um eine Übersicht zu gewinnen, kann man die entsprechenden Kurven aufzeichnen. Man sieht dann, dafs sie regelmäfsig sinus- oder cosinusförmig verlaufen, nur mit kleinen, ganz offenbar auf den Unvollkommenheiten der Messungen beruhenden unregelmäfsigen Abweichungen. Insofern können wir sagen, dafs wir eine experimentelle Verifikation des Resultates erhalten haben, dafs die Kraft bei der Phasenverschiebung nach einem solchen Gesetze ihre Intensität verändern soll. [Vergl. I, **127** (d')].

Während die Kurve innerhalb der Versuchsfehler die Form hat, welche die Theorie verlangt, sind zwei allerdings sehr kleine, aber doch unverkennbare systematische Abweichungen zu notieren, was die Lage der Kurve relativ zu den Koordinatachsen betrifft. Die erste besteht in einer seitlichen Verschiebung, welche zur Folge hat, dafs das Maximum der anziehenden Kraft nicht ganz genau bei der Einstellung auf den Phasenunterschied Null, und das Maximum der abstofsenden nicht ganz genau bei der Einstellung auf den Phasenunterschied $\frac{1}{2}$ eintritt. Wenn man durch Abänderung der

Versuchsbedingungen nach der Ursache sucht, so erkennt man bald, daſs sie in der in **64** behandelten Unvollkommenheit der pneumatischen Transmission zu suchen ist. Auf diesen Fehler muſs man bei allen messenden Versuchen aufmerksam sein, und nie nach der bloſsen Einstellung als sicher annehmen, daſs man die erwünschte Phase erhalten hat.

Die andere Abweichung besteht darin, daſs die horizontale Mittellinie der Kurven nicht genau mit der Abcissenachse zusammenfällt, sondern ein wenig unter derselben. Mit anderen Worten, die Anziehung ist durchgehend etwas stärker als die Abstoſsung. Dies beruht auf der von der Phasenverschiebung unabhängigen, immer anziehenden temporären Kraft, welche sich in genügend kleinen Abständen geltend macht. Der Fehler ist auch nur bei der zweiten, auf den kleinsten Abstand bezüglichen Kurve sicher nachweisbar.

**80. Änderung der Amplitude.** — Wenn der eine der pulsierenden Körper mit zwei Trommeln kommuniciert, welche auf demselben Ringe befestigt sind, so giebt symmetrische Verschiebung dieser Trommeln eine Änderung der Amplitude ohne Phasenverschiebung (**42**). Solange die einfachen kinematischen Prinzipien für die Berechnung angewendet werden dürfen, ist die Amplitude proportional dem Cosinus des halben zwischen den Trommeln eingeschlossenen Winkels zu setzen. Um einfache Verhältnisse zu erhalten, können wir diesen halben Winkel der Reihe nach gleich 31°, 60°, 75,5°, 104,5°, 120°, 149° setzen. Die Cosinusse, und folglich auch die Pulsationsamplituden werden sich dann wie die Zahlen 3 : 2 : 1 : − 1 : − 2 : − 3 verhalten.

Da die Verschiebung der Trommeln mit Veränderungen des Widerstandes gegen den Generatorbetrieb verbunden ist, so muſs der Generator mit Geschwindigkeitsindikator und Kette benutzt werden. Im übrigen wird, wie gewöhnlich, die ganze Versuchsreihe ohne jede Unterbrechung des Generatorbetriebes ausgeführt.

Die folgende Tabelle giebt eine Versuchsreihe, welche bei 15 cm Centralabstand der zwei Körper voneinander und bei etwa 10 Schwingungen in der Sekunde gemacht wurde. Die in der ersten Zeile stehenden Zahlen geben relative Maſse der Amplituden. Die zwei folgenden enthalten zwei Reihen von Ablesungen an der geteilten Scheibe der Torsionswage und sind relative Maſse der in jedem Falle thätigen Kraft. Die vierte Zeile enthält die Mittel der zusammengehörigen Ablesungen, und die letzte giebt die Differenzen dieser Mittelzahlen.

| | Amplitude | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 3 | 2 | 1 | 0 | −1 | −2 | −3 |
| Kraft . . . | −3,4<br>−3,4 | −2,1<br>−2,2 | −1,1<br>−1,1 | 0<br>0 | +1,3<br>+1,1 | +2,5<br>+2,3 | +3,4<br>+3,4 |
| Mittel . . . . | −3,4 | −2,15 | −1,1 | 0 | +1,2 | +2,4 | +3,4 |

Differenz: 1,25, 1,05, 1,1, 1,2, 1,2, 1,2.

Die Kraft soll nach der Theorie proportional der Pulsationsintensität jedes der zwei Körper sein. Die Pulsationsintensität ist ihrerseits bei konstanter Schwingungszahl der Amplitude proportional. Die Kraft selbst soll sich also proportional der Pulsationsamplitude des einen Körpers verändern. Mit anderen Worten, die in der letzten Zeile enthaltene Differenz soll nach der Theorie konstant sein. Dieses ist nun nicht ganz der Fall. Die Abweichungen sind aber ganz unregelmäſsig verteilt und betragen nie mehr als etwa 7 Prozent des mittleren Wertes 1,17. Eine im übrigen genau ähnliche Beobachtungsreihe, wo die Kurbeln auf etwas gröſsere Excentricität eingestellt waren, und somit die Kräfte etwas gröſser, gab die folgende Reihe der entsprechenden Differenzen

1,9 1,9 2,0 1,9 2,1 1,7,

welche höchstens um 10 Prozent von dem mittleren Werte 1,92 abweichen.

Da diese und ähnliche Beobachtungsreihen keine Abweichungen systematischer Natur aufweisen, so können wir sagen, daſs die Theorie in diesem Punkte innerhalb der Fehlergrenze verificiert worden ist.

**81. Änderung der Schwingungszahl.** — Während die zwei Amplituden einzeln vergröſsert oder verkleinert werden können, kann die Schwingungszahl, wegen der Bedingung des Isochronismus, nur gleichzeitig für beide pulsierende Körper geändert werden. Da die Schwingungszahl in die Pulsationsintensität jedes Körpers als Faktor eingeht, wird deshalb die Kraft bei der Änderung nur der Schwingungszahl, während alle anderen Parameter konstant gehalten werden, sich proportional dem Quadrate der Schwingungszahl verändern.

Der Versuch kann sehr einfach in der Weise angestellt werden, daſs man den Generator mit einer gewissen Gröſse der Gewichte $G$

und $G'$ treibt, bis die Geschwindigkeit konstant geworden ist. Dann zählt man die Anzahl der Schläge und bestimmt die Kraft an der Torsionswage. Dann vergröſsert man das Gewicht $G$ und macht die entsprechenden Bestimmungen bei der entsprechenden höheren Geschwindigkeit. Die Messungen geben im allgemeinen eine recht befriedigende Übereinstimmung mit der Theorie in allen Fällen, wo man nicht Grund zu vermuten hat, daſs die Veränderung der Schwingungszahl zugleich merkbare Änderungen der Amplitude und der Phase zur Folge hat, wie dieses immer zuletzt der Fall sein wird, wenn man zu höheren Schwingungszahlen mit den entsprechenden stärkeren Kompressionen der eingeschlossenen Luftmassen, wo dann Resonanzerscheinungen möglich sind, übergeht.

Als Beispiele der erhaltenen Beobachtungsreihen sind in der folgenden Tabelle zwei angeführt, welche eine mittlere Genauigkeit haben dürften. Die erste Zeile giebt die Schwingungszahlen, und die zweite die Ablesungen an der Torsionswage. Die dritte Zeile enthält das Verhältnis der Quadrate der Schwingungszahlen, und die vierte die entsprechenden Verhältnisse der Kräfte. Zwischen diesen zwei Reihen von Verhältniszahlen ist die Übereinstimmung den Umständen nach durchaus befriedigend.

| | Erste Reihe | | | Zweite Reihe | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Schwingungszahl . . . . | 10,4 | 6,6 | 4,6 | 8,2 | 6,9 | 5,0 |
| Kraft . . . . . . . . . | 5,5 | 2,2 | 1,1 | 3,0 | 2,0 | 1,0 |
| Verhältnis der Quadrate der Schwingungszahlen . . | 1 | 0,404 | 0,196 | 1 | 0,71 | 0,37 |
| Verhältnis der Kräfte . . | 1 | 0,4 | 0,2 | 1 | 0,67 | 0,33 |

Nach den ausgeführten Messungen verändert sich also die Kraft teils proportional der Pulsationsamplitude jeden einzelnen Pulsationskörpers und teils proportional dem Quadrate der gemeinschaftlichen Schwingungszahl beider Körper. Da nun die Pulsationsintensität proportional dem Produkte von Amplitude und Schwingungszahl ist, so führen diese zwei Resultate, wenn wir sie zusammenfassen, zu dem weiteren, daſs die Kraft proportional dem Produkte der beiden Pulsationsintensitäten ist.

**82. Das Abstandsgesetz.** — Um das Abstandsgesetz zu prüfen, benutzt man wieder einfach den Generator ohne die Kette, wartet bis der Betrieb konstant geworden ist und nimmt systematische Änderungen der Abstände der pulsierenden Körper vor.

Als Beispiel sei die folgende Beobachtungsreihe angeführt. In der ersten Zeile stehen die Centralabstände der zwei pulsierenden Körper, und die sechs folgenden enthalten die entsprechenden Ablesungen an der Torsionswage. Die zwei ersten und die zwei letzten dieser Zeilen beziehen sich auf den Fall, daſs auf entgegengesetzte Phase, also auf Abstoſsung, eingestellt war, die zwei mittleren beziehen sich auf den Fall der gleichen Phase und Anziehung. Alle Reihen wurden ohne Unterbrechung des Generatorbetriebes nacheinander aufgenommen und ohne andere Veränderung der Einstellung, als die Verschiebung der einen Trommel des Generators um 180° auf seinem Ringe, um von gleicher zu entgegengesetzter Phase zu gelangen.

| Abstand | 19,8 | 14 | 9,9 | 7 cm |
|---|---|---|---|---|
| Abstoſsung . . . . . . . | 0,9 | 2,0 | 3,8 | 7,0 |
| | 1,1 | 2,2 | 4,1 | 7,7 |
| Anziehung . . . . . . . | 0,9 | 1,9 | 4,0 | 8,0 |
| | 1,0 | 2,0 | 3,8 | 7,7 |
| Abstoſsung . . . . . . . | 1,0 | 1,9 | 3,6 | 7,1 |
| | 1,0 | 2,0 | 3,6 | 6,7 |

Die reciproken Quadrate der hier zur Anwendung gekommenen Abstände verhalten sich wie

(a) $1 : 2 : 4 : 8.$

Die entsprechenden Kräfte im Falle der Abstoſsung verhalten sich im Mittel wie

(b) $1 : 2{,}02 : 3{,}77 : 7{,}12$

und im Falle der Anziehung wie

(c) $1 : 2{,}05 : 4{,}10 : 8{,}25.$

Das Mittel dieser zwei Reihen giebt endlich

(d) $1 : 2{,}03 : 3{,}93 : 7{,}68.$

Zunächst fällt hier der Unterschied der bei Anziehung und der bei Abstoſsung gemessenen Kräfte auf. In kleinen Abständen sind die anziehenden Kräfte bedeutend gröſser als die abstoſsenden. Dies beruht auf dem Eingreifen der temporären Kraft, welche unabhängig von der Phasenverschiebung immer anziehend wirkt und welche nach

der Theorie umgekehrt wie die fünfte Potenz der Entfernung abnimmt (vergl. nächsten Abschnitt). Dafs diese Erklärung auch wirklich quantitativ zutrifft, davon kann man sich überzeugen, wenn man die schwache Anziehungskraft mifst, welche zurückbleibt, wenn man die Verbindung einmal des einen und einmal des anderen Pulsationskörpers mit dem Generator unterbricht. Die Summe dieser Kräfte zeigt sich ziemlich nahe gleich der halben Differenz der Anziehungs- und der Abstofsungskraft, wenn beide Körper pulsieren.

In der Reihe (d) der Mittelzahlen der abstofsenden und der entsprechenden anziehenden Kräfte ist dieser Fehler eliminiert. Diese Zahlen stimmen nun im grofsen und ganzen mit den Zahlen (a) überein, welche die reciproken Quadrate der Abstände geben. Eine systematische Abweichung giebt sich jedoch auch zu erkennen. Denn die Kraft nimmt etwas langsamer als nach dem umgekehrt quadratischen Gesetze ab. Dieses erklärt sich aus der Kleinheit des Gefäfses. Denn das umgekehrt quadratische Gesetz hat nur in einer unbegrenzten Flüssigkeit strenge Gültigkeit. Im begrenzten Gefäfse hat man noch mit der Wirkung der Spiegelbilder in den Wänden zu thun (65). Achtet man nun darauf, wie sich das System der Spiegelbilder verschiebt, wenn der Aktionskörper von Stelle zu Stelle bewegt wird, so erkennt man leicht, dafs das Resultat eine langsamere Abnahme als die umgekehrt quadratische sein wird.

**83. Absolute Messungen.** — Innerhalb der Grenze der Versuchsfehler und der unvermeidlichen systematischen Fehler haben wir also nachgewiesen, dafs die zwischen zwei pulsierenden Körpern wirkende Fernkraft proportional dem Produkte der zwei Pulsationsintensitäten und umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung ist. Alles ist durch relative Messungen geschehen. Wir können aber jetzt die messenden Versuche dadurch abschliefsen, dafs wir bei einer bestimmten Aufstellung und bei einem bestimmten Betriebe alle eingreifenden Gröfsen in absolutem Mafse messen, um die Formel **17** (a) auch in Bezug auf den numerischen Faktor, den sie enthält, zu verificieren.

Zunächst mufs dann die Torsionswage absolut geaicht werden. Der Pulsationskörper befindet sich in 30 cm Abstand von der Umdrehungsachse. Es wird gefunden, dafs eine Kraft, welche in diesem Abstande angreift, 8,85 Dynen betragen mufste, um einer Verdrehung der geteilten Scheibe von 1° zu entsprechen.

Bei dem Hauptversuche werden nun beide Kurbeln des Generators auf eine Excentricität von 3 mm eingestellt. Bei einer Schwin-

gungszahl von 9,8 ganzen Pulsationsschlägen in der Sekunde und bei einem Centralabstande von 9,9 cm wird dann als Mittel eines Anziehungs- und eines Abstoſsungsversuches eine Kraft von

(a) 84 Dynen

gefunden.

Zur Berechnung der Kraft haben wir nach **42** (a), daſs einer linearen Amplitude von 3 mm eine Pulsationsamplitude von 4,95 $cm^3$ entspricht, jedoch nur unter der Voraussetzung, daſs die Transmission von dem Generator zu dem Pulsationskörper ohne Verluste vor sich geht. Der in dieser Weise berechnete Wert wird also in der That eine obere Grenze der wirklich effektiven Pulsationsintensität sein, welcher wir doch ziemlich nahe sein müssen, da wir einerseits bei ziemlich kleiner Schwingungszahl arbeiten, und da andererseits die Membran des ballonförmigen Pulsationskörpers sehr schwach (etwa 0,1 mm Dicke) im Vergleich zu derjenigen der Generatortrommel (1 mm Dicke) ist. Indem wir also mit diesem Werte der Amplitude weiter rechnen, ergiebt sich nach der Regel **13** (A) die Pulsationsintensität 216 $\frac{cm^3}{sec}$. Wenn wir so in der Fernwirkungsformel $\dot{E} = \dot{E}' = 216$, weiter $r = 9{,}9$ und schlieſslich $q = 1$ einsetzen, das letztere, weil der Versuch im Wasser ausgeführt wird, so ergiebt sich

$$\text{(b)} \qquad F = q \frac{\dot{E}\dot{E}'}{4\pi r^2} = 37{,}6 \text{ Dynen.}$$

Im groſsen und ganzen besteht also Übereinstimmung zwischen dem durch direkte Messung (a) und dem durch Rechnung (b) gefundenen Werte der Kraft. Die bis zu etwa 10 Prozent gehende Abweichung läſst sich sehr gut daraus erklären, dass wir mit etwas zu groſsen Werten der Pulsationsamplitude gerechnet haben. Daſs die Ursache der Abweichung wirklich hierin liegt, wird auch durch die folgenden Messungen bestätigt. Bei unveränderter Schwingungszahl, aber kleinerer Amplitude wurde durch Messung die Kraft zu 15,9 und durch Rechnung zu 16,6 Dynen bestimmt, wodurch die Abweichung auf etwa 4,5 Prozent herunterging. Bei grösserer Amplitude wurde durch Messung 55,7 und durch Rechnung 65,0 gefunden, wodurch die Abweichung auf mehr als 14 Prozent stieg. Wie zu erwarten war (**42**), ergiebt sich also bei kleineren Amplituden bessere, bei grösseren schlechtere Übereinstimmung.

Wie sich aber auch zuletzt diese und andere Abweichungen bei genauerer Untersuchung erklären werden, so sind wir doch nie

Nichtübereinstimmungen in den Gröfsenordnungen begegnet, was doch sonst in der Hydrodynamik so oft vorkommt. Die Ursache dürfte, wie schon hervorgehoben, die sein, dafs sich bei den Schwingungen mit kurzen Amplituden die tumultuarischen Wasserbewegungen nie zu gröfserer Intensität entwickeln können (67). Durch weitere Verbesserungen der Instrumente und der Versuchsanordnungen darf man hoffen, ebenso gute Messungen zu erhalten, wie diejenigen beispielsweise, welche die Coulomb'sche Torsionswage giebt, und welche der Lehre von den elektrischen und magnetischen Fernkräften gewöhnlich zu Grunde gelegt werden.

## Neunter Abschnitt.

### Versuche mit den temporären Energiekräften.

**84. Ursprung der Versuche.** — Bei Versuchen mit den permanent pulsierenden oder oscillierenden Körpern wird man nicht selten die folgende Beobachtung machen: Man hat auf Abstofsung eingestellt, aber erhält dennoch Anziehung, wenn die Körper sehr nahe aneinander kommen. Dies tritt nur ein, wenn die zwei Körper ziemlich weit verschiedene Pulsations- oder Oscillationsintensitäten haben. Man sieht auch, dafs die Anziehung noch stärker wird, wenn man die Verbindung des schwach pulsierenden oder oscillierenden Körpers mit der Pumpe ganz aufhebt. Wahrnehmungen dieser Natur wurden in den Jahren 1875—1879 oft gemacht, zu einer Zeit, als die Aufmerksamkeit aus theoretischen Gründen ausschliefslich auf die permanenten Energiekräfte gerichtet war. Die Erscheinungen wurden vorläufig, ohne genauere theoretische oder experimentelle Untersuchung, auf das störende Eingreifen von Kräften höherer Ordnung zurückgeführt.

Durch diese Beobachtungen war aber die Aufmerksamkeit auf die Kräfte höherer Ordnung gerichtet worden, und als Bjerknes 1879 eine genauere theoretische Diskussion derselben unternahm, wurde er zu dem Resultat über die inverse Analogie dieser Kräfte mit den temporären, auf gegenseitiger Influenz beruhenden elektrischen und magnetischen Kräfte geführt (vergl. I, **222**, S. 337).

Nachdem theoretische Klarheit gewonnen war, wurden sofort Experimente angestellt, um die Hauptpunkte der Theorie zu veri-

ficieren. Die Versuche, die ohne Vergleich viel einfacher anzustellen waren, als die schon ausgeführten über die permanenten Fernkräfte, gelangen ohne Schwierigkeit.[1] In der That handelte es sich auch nicht mehr um die Anstellung vollständig neuer Versuche, sondern nur um die Wiederholung von bekannten älteren Versuchen unter neuen Gesichtspunkten. Geleitet durch Anschauungen, welche mit denen der herrschenden Fernwirkungslehre nicht übereinstimmten, hatte der französische Physiker und Naturphilosoph GUYOT schon 1834 Experimente angestellt, und das Resultat gefunden, dafs eine in Luft tönende Stimmgabel das Vermögen hat, leichte Körperchen anzuziehen.[2] Unbekannt mit GUYOT's Versuch, entdeckten GUTHRIE und SCHELLBACH diese Erscheinung von neuem und der letztere fand zugleich die Abstofsung von Körpern, welche leichter als die Luft waren.[3] Diese Versuche veranlafsten auch einen Briefwechsel zwischen GUTHRIE und Lord KELVIN[4], aus welchem hervorgeht, dafs der letztere in die Theorie dieser Erscheinungen tief eingedrungen war und die Analogie mit dem temporären Magnetismus vollständig erkannt hatte; doch hat er bis jetzt seine Theorie nicht publiciert.

**85. Vorrichtungen zur Ausführung der Versuche.** — Bei den neuen Versuchen kommt wie bei den früheren der Generator mit Pulsatoren und Oscillatoren zur Anwendung. Das Neue, das man noch dazu braucht, sind einfach beweglich angebrachte Kugeln verschiedener spezifischer Gewichte.

Die einfachste Anbringung dieser Kugeln ist die pendelförmige Aufhängung, von oben, wenn die Kugel schwerer, dagegen von unten, wenn sie leichter als die Flüssigkeit ist. Um die meistens erwünschte gröfsere Empfindlichkeit zu erhalten, kann man eine Astatisierung vornehmen, indem man an demselben Aufhängefaden am unteren Ende die schwere, und etwas höher die leichte Kugel anbringt.

Jede beliebige Empfindlichkeit kann man andererseits mit der Befestigung der Kugeln an den Arm einer Torsionswage erreichen.

---

[1] Über die ersten Versuche vergleiche: C. A. BJERKNES, Videnskabsselskabets Forhandlinger, Christiania, 3. und 31. Oktober 1879.

[2] Vergl. F. GUTHRIE, Phil. Mag. 41 S. 405, 1871, und BERTLIN, Ann. de Chimie et de Physique 25, S. 199, 1872.

[3] F. GUTHRIE, Proc. of the Roy. Soc. London, 19, S. 35, 1870. Phil. Mag. 40, 345. — SCHELLBACH, Pogg. Ann. 139, S. 670; 140, S. 325 und 495, 1870.

[4] Phil. Mag. 41, S. 423. — Sir W. THOMSON, Papers on Electrostatics and Magnetism S. 571.

Die schwere kann ohne Schaden starr mit dem Arme verbunden werden. Die leichte darf dagegen nie starr mit irgend einem Körper verbunden werden, da sie dadurch die mit der Leichtigkeit folgende Beweglichkeit verlieren kann, auf die es bei ihr ankommt (10). Am zweckmäſsigsten hängt die leichte und die schwere Kugel an demselben Faden von dem Arm der Torsionswage herunter, nur mit einem passenden, wenigstens ein paar Kugeldurchmesser betragenden Abstand und mit einem passenden Übergewicht der schweren Kugel.

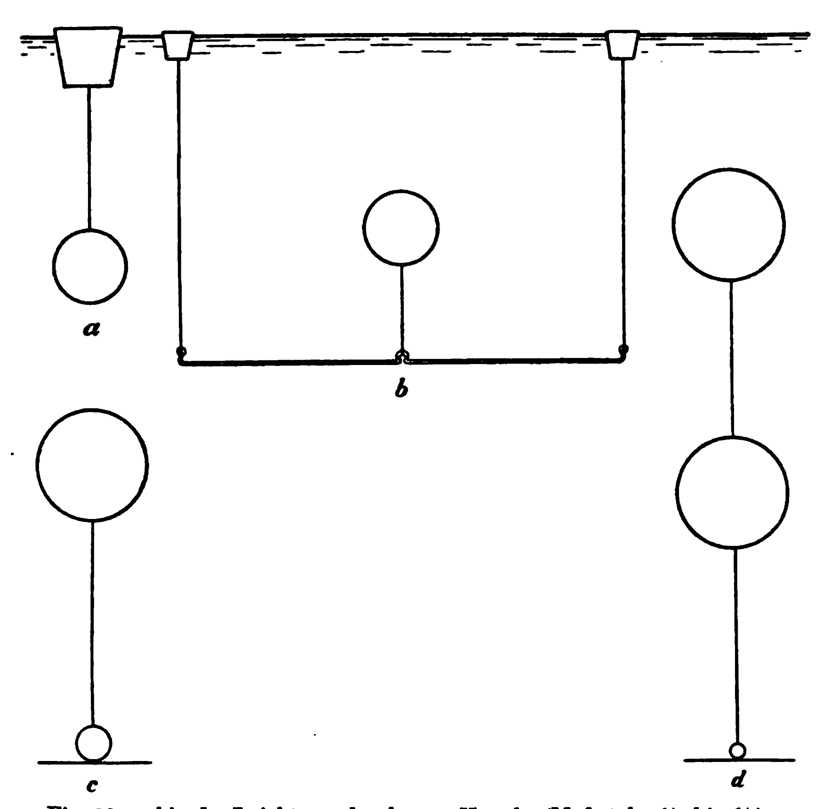



Fig. 38, a bis d. Leichte und schwere Kugeln (Maſsstab: $^1/_2$ bis $^1/_4$).

Die Anordnung mit der Torsionswage ist die beste, wenn man feinere, beispielsweise messende Versuche anstellen will, oder solche, wo man eine bestimmte Komponente der Kraft isolieren will. Wenn es sich dagegen nur um einfachere qualitative Versuche handelt, so sind die in Figur 38 abgebildeten Vorrichtungen meistens die bequemsten. Die schwere Kugel, etwa aus Siegellack hergestellt, läſst man einfach an einem passend langen Faden von einem Kork herunterhängen,

welcher auf der Oberfläche des Wassers schwimmt (Figur 38a). Die Anbringung der leichten Kugel zeigt b. Ein passend langer und schwerer Metalldraht hängt an zwei Fäden, die wieder von zwei Korken getragen werden. In der Mitte des Metalldrahtes ist die leichte Kugel an einem kürzeren Faden befestigt. Die letztere kann eine Kork-, Holundermark- oder hohle Glaskugel sein.

Wenn man diese Vorrichtungen benutzt, mufs man dafür sorgen, dafs die Oberfläche des Wassers rein ist. Denn hat das Wasser mehrere Stunden oder mehrere Tage gestanden, so bildet sich als Folge des niedergefallenen Staubes ein zähes Häutchen auf der Oberfläche, welches die Bewegung der schwimmenden Körper sehr hindert. Wenn es hinlänglich alt ist, zeigt es sogar die Eigenschaften einer elastischen Membran. Der schwimmende Körper wird in einer Lage stabilen Gleichgewichtes festgehalten, und mufs zu derselben selbst nach ziemlich grofsen Verschiebungen zurückkehren.

Durch Abschäumen kann man immer den Einflufs des Häutchens hinlänglich klein machen. Hat aber das Aquarium einen ebenen glatten Boden, so kann man sich mit Vorteil so einrichten, dafs man überhaupt nicht mit der Oberfläche in Berührung kommt. An die leichte Kugel hängt man an einen Faden ein passend schweres Metallgewicht (Figur 38c), von dem man soviel abfeilt, dafs es mit verschwindend kleinem Druck auf dem Boden des Gefäfses ruht, und sich fast widerstandslos längs desselben hinbewegt. In ähnlicher Weise kann man die schwere Kugel von der leichten tragen lassen und unten nur ein kleines Gewicht beifügen, welches längs des Bodens schleppt (Figur 38d). Diese Anordnungen mit schleppendem Gewichte sind die vorteilhaftesten, wenn man den Kugeln gröfsere Dimensionen geben will. Die schwere Kugel kann man dabei stets mit Vorteil aus Siegellack herstellen; als leichte dient am besten ein hohler Celluloidball.

**86. Die Anziehung der schweren und die Abstofsung der leichten Kugel.** — Wir können nun beispielsweise die schwere Kugel (Figur 38a) und die leichte (c) im Wasser haben. Bringt man dann einen pulsierenden Körper in die Nähe der schweren Kugel, so wird dieselbe sofort angezogen. Ebenso deutlich wird die leichte Kugel abgestofsen. Ersetzen wir den Pulsator durch einen Oscillator, so wiederholt sich genau dasselbe, dafs die schwere Kugel angezogen und die leichte abgestofsen wird. Dabei tritt kein Unterschied zwischen den zwei Polen der oscillierenden Kugel auf. Wir haben also sofort eine Verifikation des Satzes **11** (B) über die temporären

Energiekräfte erhalten, nach welchem die pulsierende wie die oscillierende Kugel auf eine schwere Kugel anziehend und auf eine leichte abstofsend wirken.

Schon die qualitativen Versuche zeigen, dafs wir es in diesen Fällen mit höheren Abstandsgesetzen als bei den permanenten Energiekräften zu thun haben. Von der Intensität in verschiedenen Abständen wird das Folgende eine Vorstellung geben: Wenn der kleinste Abstand zwischen dem Pulsator und der Siegellackkugel (etwa 4 cm Durchmesser) 3 bis 6 mm beträgt, so kann der Pulsator, den man rasch mit der Hand führt, bei leicht erreichbaren Betriebsintensitäten, die Kugel in zwei Sekunden über die ganze Ausdehnung (50 cm) des Aquariums nach sich ziehen. Ebenso weit kann er die leichte Kugel in weniger als vier Sekunden vor sich herschieben. Schon wenn der Abstand 4 bis 5 cm mehr beträgt, fängt dagegen die Kraft an, selbst bei gröfster Betriebsintensität schwer nachweisbar zu werden, wenn man nicht schärfere Beobachtungsmethoden zu Hilfe nimmt. Dieses stimmt gut mit dem theoretischen Resultate überein, dafs die Kraft, welche die pulsierende Kugel ausübt, umgekehrt wie die fünfte, und die Kraft, welche die oscillierende ausübt, umgekehrt wie die siebente Potenz der Entfernung abnimmt.

**87. Die Induktionserscheinung.** — Sehr wichtig für den Zusammenhang mit den theoretischen Entwickelungen ist die folgende Beobachtung. In grofser Nähe des pulsierenden oder oscillierenden Körpers kann man die inducierten Schwingungen der leichten oder der schweren Kugel sehen. Die der leichten sind sehr auffällig und verlaufen ganz offenbar mit bedeutend gröfseren Amplituden als die der umgebenden Wassermassen, wie man es direkt durch die Beobachtung der Bewegung kleiner suspendierter Teilchen konstatieren kann. Die schwere Kugel schwingt dagegen mit sehr kleinen Amplituden. Bei einer Blei- oder Eisenkugel sind sie fast unmerkbar, und selbst bei der Siegellackkugel sind sie viel kleiner als die der suspendierten Teilchen.

Diese Beobachtung zeigt, dafs der Zusammenhang mit der Anziehung der schweren und mit der Abstofsung der leichten Kugel wirklich der ist, welchen wir in unseren theoretischen Überlegungen entwickelten (**10**, **11**). Die Anziehungen und Abstofsungen sind sekundäre Wirkungen der inducierten Oscillationen. Sie können aus den früher gefundenen Resultaten über die Wirkungen, welche eine pulsierende oder oscillierende Kugel auf eine andere selbständig oscillierende ausübt, abgeleitet werden. Dabei ist immer nur zu

bedenken, dafs man mit den Oscillationen relativ zu dem Einfallsstrome und nicht mit den absoluten Oscillationen zu rechnen hat. In diesen relativen Oscillationen liegt der Gegensatz zwischen der leichten und der schweren Kugel. Denn relativ gerechnet oscilliert die leichte Kugel mit, die schwere dagegen gegen den Strom, und aus dieser Ursache wird der Kraftüberschufs, welcher die progressive Bewegung erzeugt, in den zwei Fällen in entgegengesetzten Richtungen ausfallen.

Mit der Kenntnis der inducierten Oscillationen sieht man auch, wie die Analogie mit den elektrischen und magnetischen Erscheinungen aufzufassen ist. Es konnte naheliegend scheinen, die schwere Kugel, welche angezogen wird, mit dem Eisen, und die leichte, welche abgestofsen wird, mit dem Wismut zu vergleichen und die Analogie als eine direkte aufzufassen. Die Induktionserscheinung zeigt aber, dafs dieses nicht möglich ist. Die leichte Kugel wird in stärkere Oscillationen als die umgebende Flüssigkeitsmasse versetzt, genau wie das Eisen stärker polarisiert wird als das umgebende Feld. Die leichte Kugel erhält deshalb auch relativ gerechnet inducierte Oscillationen mit dem oscillierenden Strom, wie das Eisen inducierten Magnetismus mit dem umgebenden Felde erhält. Die schwere Kugel erhält dagegen, relativ gerechnet, inducierte Oscillationen gegen den oscillierenden Strom, wie das Wismut, relativ gerechnet, inducierten Magnetismus gegen das Feld erhält. Man ist deshalb gezwungen, die leichte Kugel mit dem Eisen, und die schwere mit dem Wismut zu vergleichen, und zufolge des verkehrten Polgesetzes wird die leichte abgestofsen und die schwere angezogen.

**88. Verschiedene charakteristische Eigentümlichkeiten der Kräfte.** — Wegen der schnellen Abnahme der Kräfte mit dem Abstande passiert es oft, dafs in gröfseren Abständen die Wirkung der gebildeten Ströme (66) die Oberhand gewinnt. Man mufs es deshalb so einrichten, dafs diese Ströme möglichst schwach werden, und es ist folglich durchgehend vorteilhaft, mit kleinen Amplituden und mit um so gröfseren Schwingungszahlen zu arbeiten. Von den Strömen wird man jedoch nie ganz frei und es ist immer grofse Vorsicht notwendig, wenn es sich um messende Versuche handelt, oder wenn man die verschiedenen aus der Theorie folgenden kleinen charakteristischen Eigentümlichkeiten der Kräfte untersuchen will.

Die Kraft, welche die pulsierende Kugel ausübt, ist eine einfache Centralkraft. Bei der oscillierenden hat man es dagegen mit einer in verschiedenen Richtungen verschieden starken Radial-

komponente und daneben mit einer Meridiankomponente zu thun. In einem und demselben Abstande wird nach unseren theoretischen Entwickelungen (Band I, **208**) die Radialkomponente proportional

$$3\cos^2\theta + 1$$

und die Meridiankomponente proportional

$$\sin\theta\cos\theta \quad \text{oder} \quad \tfrac{1}{2}\sin 2\theta$$

sein, wenn $\theta$ vom Pol aus gerechnet wird. Ist die Radialkomponente anziehend, so wirkt die Meridiankomponente polwärts, ist sie abstofsend, so ist die Meridiankomponente gegen die Äquatorebene gerichtet.

Aus den Formeln sieht man zunächst, dafs die Radialkomponente in der polaren Achse ($\theta = 0$) viermal gröfser als in der Äquatorebene $\left(\theta = \frac{\pi}{2}\right)$ ist. Diesen bedeutenden Intensitätsunterschied, je nachdem die Kugel longitudinal oder transversal relativ zu der neutralen oscilliert, weist man bei den Versuchen leicht nach. Mit der Torsionswage merkt man den Unterschied sofort, und qualitativ weist man es mit der gröfsten Deutlichkeit nach, wenn man untersucht, wie schnell die oscillierende Kugel bei verschiedener Orientation eine schwere Kugel nach sich ziehen oder eine leichte vor sich herschieben kann.

Schwerer ist dagegen der einwandsfreie Nachweis der Meridiankomponente. Diese hat ihr Maximum für $\theta = 45^0$, und ihre Intensität ist hier $\frac{1}{2}$, wenn die der Radialkomponente in der polaren Achse 4 und in der Äquatorebene 1 beträgt. Man befestigt am besten die leichte oder die schwere Kugel an einer Torsionswage, die man so einstellt, dafs ihr verlängerter Arm in der Gleichgewichtslage durch den Mittelpunkt der oscillierenden Kugel geht. Es kann sich dann nur eine längs der Meridiane gerichtete Komponente geltend machen. Dennoch erhält man wegen der gebildeten Ströme oft nur unregelmäfsige Resultate, wenn man nicht weitere Vorsichtsmafsregeln trifft. Einwandsfrei kann man in der That den Versuch nur in der folgenden Weise machen: Man wartet erst, bis die Flüssigkeit vollkommen in Ruhe gekommen ist. Dann setzt man den Generator in Bewegung, ohne noch die Verbindung mit der oscillierenden Kugel herzustellen. Wenn dann die erwünschte Betriebsgeschwindigkeit erreicht worden ist, stellt man die Verbindung plötzlich her, um sie nach einer oder zwei Sekunden wieder zu unterbrechen. Während der kurzen Dauer der Oscillationen haben die

Ströme nicht Zeit, sich zu gröfserer Intensität zu entwickeln, oder sie erreichen überhaupt nicht das Gebiet, wo die Kugel aufgehängt ist. Diese erleidet folglich nur die Wirkung der hydrodynamischen Fernkraft, und man findet, dafs die Torsionswage ausnahmslos in der Richtung ausschlägt, welche die Theorie verlangt, nämlich gegen den Pol zu, wenn die Kugel leicht, und gegen den Äquator, wenn sie schwer ist. Dreht man aber die oscillierende Kugel, so dafs der Arm der Torsionswage entweder längs der polaren Achse oder in die Äquatorebene fällt, so tritt kein Ausschlag ein. Die Meridiankomponente ist hier, wie die Formel zeigt, gleich Null.

Genau entsprechende magnetische Versuche kann man anstellen, wenn man eine empfindliche Torsionswage mit einem Stück Eisen oder Wismut in der Nähe eines kurzen aber kräftigen Elektromagnetes aufstellt. Ist der Magnet hinlänglich kurz, so kann er mit einem kugelförmigen Magnet und folglich auch mit der oscillierenden Kugel verglichen werden. Wird der Arm der Torsionswage in der verlängerten Achse oder in der Äquatorebene des Magnetes eingestellt, so erfolgt kein Ausschlag. Bildet aber die Torsionswage einen beliebigen anderen Winkel, am vorteilhaftesten jedoch einen von 45°, mit der Achse des Magnetes, so schlägt das Eisen in der Richtung des Poles, das Wismut in der Richtung der Äquatorebene aus. Die Übereinstimmung in solchen an sich unbedeutenden Einzelheiten setzt die Vollständigkeit der Analogie zwischen den magnetischen Erscheinungen und den hydrodynamischen ins volle Licht. Nur mufs man sich immer erinnern, dafs man aus zwingenden Gründen, wie wir gesehen haben, den schweren Körper mit dem Wismut und den leichten mit dem Eisen zu vergleichen hat, obgleich sich der schwere wie das Eisen und der leichte wie das Wismut bewegt.

**89. Die Rückwirkung auf die permanent pulsierenden oder oscillierenden Kugeln.** — Ein induciertes Zittern des pulsierenden Körpers merkt man nicht, und noch weniger kann man bei der oscillierenden Kugel diejenigen inducierten Oscillationen entdecken, welche sich über die vorhandenen permanenten überlagern. Dieses stimmt vollkommen mit der Theorie überein. Denn für die Induktionskraft ist kein Gegenwirkungsprinzip gültig (Band I, 177), und zwar ist in dem vorliegenden Falle die Rückinduktion, welche die leichte und die schwere Kugel auf die permanent pulsierenden oder oscillierenden ausüben, höherer Ordnung als die direkte Induktion, welche sie erleiden.

Das Auftreten dieser Kraft, welche das Gegenwirkungsprinzip

verletzt, entdeckt man aber nur durch minutiöse Beobachtungen. Wenn die Schwingungen mit hinlänglich kleinen Amplituden und mit hinlänglich hohen Schwingungszahlen verlaufen, so wird man das Vorhandensein einer Kraft mit solchen Eigenschaften überhaupt nicht mehr ahnen. Für die Energiekraft dagegen, welche die sichtbaren Bewegungen erzeugt, findet man aber sofort, daſs das Gegenwirkungsprinzip gültig ist.

Qualitativ zeigt man dies durch die folgenden Versuche. Man bringt eine auf einen Stab befestigte schwere Kugel in die Nähe des Pulsationskörpers einer Pulsationswage. Dieser wird dann angezogen. Führt man die Kugel voraus, so folgt der pulsierende Körper nach, genau wie früher die schwere Kugel dem pulsierenden Körper nachfolgte. Andererseits kann man die schwere Kugel durch eine leichte ersetzen, welche mittels eines Fadens an einem Stabe befestigt ist. Diese leichte Kugel stöſst dann den pulsierenden Körper ab, und treibt ihn vor sich, wenn man mit der leichten nachfolgt. Diese Kräfte zeigen ähnliche Intensität, und ein ähnlich rasches Abnehmen mit dem Abstande wie die direkte Wirkung des pulsierenden Körpers auf die leichte oder auf die schwere Kugel. Genau entsprechende Versuche kann man mit der leichten oder schweren Kugel und der Oscillationswage anstellen. Die oscillierende Kugel wird von der leichten abgestoſsen und von der schweren angezogen, gleichgültig ob sie auf longitudinale oder auf transversale Beweglichkeit eingestellt ist. Doch zeigt sich die Wirkung auf die longitudinal bewegliche bedeutend stärker, als die auf die transversal bewegliche, genau wie die Wirkung der oscillierenden Kugel auf die leichte oder auf die schwere bei den longitudinalen Oscillationen bedeutend kräftiger als bei den transversalen war.

Man kann über die Gegenwirkung auch Versuche quantitativer Natur machen, indem man die leichte, beziehungsweise die schwere Kugel in passender Weise an einem von der Pulsations- oder Oscillationswage selbst ausgehenden Arm befestigt. Wirkung und Gegenwirkung heben sich dann in dem gesamten Systeme auf und es tritt keine progressive Bewegung ein, vorausgesetzt, daſs die Pulsations- oder Oscillationswage nicht schon an sich, aus irgend einer der behandelten Ursachen (66) Tendenzen zu Eigenbewegungen hat.

Man kann auch bei dieser Rückwirkung die schwache Merdiankomponente nachweisen, welche in den Wechselwirkungen zwischen der permanent oscillierenden und der leichten oder der schweren Kugel auftritt. Um deutliche Wirkungen zu erhalten, nimmt man die leichte und die schwere Kugel ziemlich groſs, etwa von gleicher

Gröſse, wie die permanent oscillierende. Die Meridiankomponente kann kleine seitliche Verschiebungen zur Folge haben, welche auftreten, wenn man die leichte oder schwere Kugel in der Richtung des verlängerten Armes der Oscillationswage anbringt, und die oscillierende Kugel auf einen intermediären Fall zwischen der longitudinalen und der transversalen Beweglichkeit einstellt. Die interessanteste Wirkung erhält man aber, wenn die oscillierende Kugel auf drehende Beweglichkeit eingestellt ist. Bringt man dann eine schwere Kugel in die Nähe, so dreht sich die oscillierende, bis sie in eine Lage kommt, wo sie relativ zu der schweren longitudinal oscilliert. Kehrt man sie um, so daſs der andere Pol am nächsten kommt, so herrscht wieder stabiles Gleichgewicht. In der Lage, wo sie transversal oscilliert, ist dagegen das Gleichgewicht instabil. Tauschen wir aber die schwere Kugel gegen eine leichte aus, so wird sich die oscillierende entgegengesetzt drehen. Sie hat stabiles Gleichgewicht, wenn sie transversal, dagegen instabiles, wenn sie longitudinal oscilliert.

Der Versuch gehört wieder zu denjenigen, welche vorzüglich geeignet sind, die Vollständigkeit der Analogie mit dem Magnetismus zu zeigen. Man führt den entsprechenden magnetischen Versuch leicht mit einer Kompaſsnadel und einem Stück Eisen aus. Die Nadel stellt sich dann bekanntlich longitudinal ein und ein drehbarer kugelförmiger Magnet würde dasselbe thun. Daſs sich die Magnetnadel einem Stück Wismut gegenüber transversal einstellen würde, sieht man auf der anderen Seite leicht theoretisch ein, obgleich der Versuch in der Praxis schwer ausführbar sein würde.

Einem Grenzfall der hier betrachteten Rückwirkungen der neutralen Körper auf den permanent pulsierenden oder oscillierenden sind wir schon früher begegnet, nämlich in der Wirkung, welche die Wände des Gefäſses ausüben. Eine starre Wand kann als der Grenzfall einer unendlich groſsen, unendlich schweren und folglich unbeweglichen Kugel aufgefaſst werden. Die Wirkung, welche die pulsierende oder die oscillierende Kugel in der Nähe einer Wand erleidet, entspricht der Wirkung, welche ein magnetischer Pol oder ein Magnet in der Nähe einer unendlich ausgedehnten Wand aus einer unendlich diamagnetischen Substanz erleiden würde, nur daſs immer die Kraft, zufolge des verkehrten Polgesetzes, die entgegengesetzte Richtung hat.

Auch diese Wirkung, welche wir früher als eine Störung bezeichnet haben (**26**, **37**, **65**), ist also, genauer besehen, eine Erscheinung, welche einen neuen Beleg für die Vollständigkeit der Analogie mit den magnetischen Erscheinungen giebt.

**90. Drehung stabförmiger Körper.** — Der gewöhnlichste Versuch, durch den man verschiedene Stoffe in Bezug auf Ferromagnetismus oder Diamagnetismus untersucht, ist der, daſs man einen stabförmigen Körper des zu untersuchenden Stoffes zwischen die Pole eines Elektromagnets bringt. Wenn der Stoff ferromagnetisch ist, so stellt sich das Stäbchen longitudinal, wenn der Stoff diamagnetisch ist, stellt es sich transversal. Genau dasselbe tritt ein, wenn das Stäbchen in die Nähe nur eines einzigen Poles eines Magnetes gebracht wird. Die longitudinale, gegen den Pol zeigende Lage ist den ferromagnetischen, die dazu senkrechte, transversale Lage den diamagnetischen Körpern eigen.

Wir haben vom hydrodynamischen Standpunkte aus den Fall stabförmiger Körper nicht theoretisch behandelt. Es kann in der Weise geschehen, daſs man die hydrodynamische Druckkraft und die Drehungsmomente berechnet, welche ein Umdrehungsellipsoid erleidet, und den Stab kann man als den Grenzfall eines unendlich gestreckten Ellipsoids betrachten. Das qualitative Resultat läſst sich jedoch auch in der Weise ableiten, daſs wir anstatt eines Stabes zwei starr miteinander verbundene Kugeln betrachten.

Sind beide leichter als die Flüssigkeit, so werden sie beide von abstoſsenden Kräften angegriffen. Diejenige Kugel, welche der pulsierenden am nächsten ist, erleidet aber stärkere Kraft und folglich entsteht auſser der Resultantkraft auch ein Kräftepaar, welches die Verbindungslinie der Kugeln nach der transversalen Lage hinzudrehen sucht. In dieser Lage wird stabiles, in der longitudinalen dagegen labiles Gleichgewicht herrschen. Wenn beide Kugeln schwerer als die Flüssigkeit sind, so verändert sich das Vorzeichen beider Kräfte und folglich auch des Kräftepaares, so daſs die Drehung nach der longitudinalen Lage hin stattfinden muſs. Diese wird eine Lage stabilen, und die transversale eine Lage instabilen Gleichgewichtes sein.

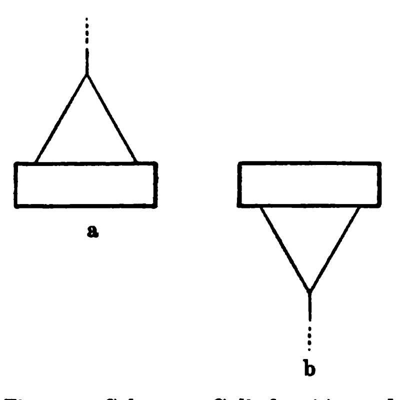


Fig. 39. Schwerer Cylinder (a), und leichter Cylinder (b) (Maſsstab: $^1/_2$).

Die Versuche sind äuſserst leicht auszuführen. Man kann einen schweren cylindrischen Körper (Siegellack) von oben, und einen leichten (Kork, Holundermark, hohler Celluloidcylinder) von unten

an einem Torsionsfaden aufhängen (Figur 39). Nähert man einen Pulsator einem dieser Körper, so stellt sich sofort der leichte in die transversale und der schwere in die longitudinale Lage ein. Genau dasselbe wird der Fall sein, wenn man einen Pol einer oscillierenden Kugel in die Nähe bringt. Auch wird man keinen grofsen Unterschied wahrnehmen, wenn man einen anderen Teil der oscillierenden Kugel dem Stäbchen zukehrt. In der polaren Achse und in der Äquatorebene stellt sich das schwere Stäbchen genau longitudinal, das leichte genau transversal ein. In den anderen Lagen hat man kleinere Abweichungen, was auf dem Eingreifen der Meridiankomponente der Kraft beruht.

**91. Gleichzeitig wirkende permanente und temporäre Kraft.** — Wie schon erwähnt, wurde das Studium der temporären Fernkräfte anfänglich dadurch veranlafst, dafs sie in die Versuche über permanente Kräfte gelegentlich störend eingriffen (**84**). Nachdem wir aber jetzt mit jeder Klasse von Kräften für sich vertraut sind, hat die Untersuchung eben ihrer kombinirten Wirkungen ein besonderes Interesse, weil sich dadurch strenge Übereinstimmungen der theoretisch entwickelten Resultate mit besonderer Rücksicht auf die Analogie zu den magnetischen Erscheinungen geben.

Für den Fall, dafs es sich um pulsierende Kugeln handelt, sind die Formeln in Band I, **209** entwickelt. Am meisten interessiert der Fall, wenn die temporäre Kraft die permanente überwindet. Wenn die Kugeln gleich grofs sind, kann dies nur unter der Bedingung eintreten, dafs die zwei Kugeln verschieden starke Pulsationsintensitäten $\hat{E}$ und $\hat{E}'$ haben. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dafs der Unterschied so grofs ist, dafs man $\hat{E}'^2$ gegen $\hat{E}^2$ vernachlässigen kann. Die aufgestellten Formeln für die kritischen Abstände, wo sich die permanente und die temporäre Kraft das Gleichgewicht halten, vereinfachen sich dann und die Resultate werden die folgenden: Wenn die Pulsationen gleichnamig sind und die schwach pulsierende Kugel unendlich leicht ist, so werden die beiden Kugeln einander anziehen aufserhalb und abstofsen innerhalb des Centralabstandes

$$r_l = D\sqrt[3]{\frac{\hat{E}}{2\hat{E}'}}, \tag{a}$$

wo $D$ der Durchmesser der Kugel ist. In diesem Abstande selbst herrscht stabiles Gleichgewicht. Sind die Pulsationen ungleichnamig, und ist die schwach pulsierende unendlich schwer, so werden die

zwei Kugeln einander abstofsen aufserhalb und anziehen innerhalb des Abstandes

$$r_s = D\sqrt[3]{\frac{E}{4E'}}. \tag{b}$$

In diesem Abstand selbst herrscht instabiles Gleichgewicht. Nach diesen Formeln wächst der kritische Abstand auf zwei Kugeldurchmesser an, wenn die leichte Kugel 16 mal kleinere, die schwere 32 mal kleinere Pulsationsintensität, auf anderthalb Kugeldurchmesser, wenn die leichte 6,7, die schwere 13,5 mal kleinere Pulsationsintensität als die stark pulsierende hat. Wenn die leichte Kugel nicht mehr unendlich leicht und die schwere nicht mehr unendlich schwer ist, werden die kritischen Abstände in leicht angebbaren Verhältnissen verkleinert. Mit der Schwere der Metalle und der Leichtigkeit aufgeblasener Ballons kommt man aber der Grenze schon ziemlich nahe, und die auf den Grenzfall bezüglichen Formeln genügen für die qualitativen Diskussionen.

Der Versuch ist sehr einfach, wenn es sich um den schweren, schwach pulsierenden Körper handelt. Denn die Pulsationskörper sowohl der Pulsationswage wie der feststehenden Pulsatoren sind wegen ihrer Verbindungen mit den Zuleitungsröhren immer als schwer zu betrachten. Giebt man dann dem einen dieser zehn- bis zwanzigmal kleinere Pulsationsintensität als dem anderen, so wird man im Falle von Pulsationen entgegengesetzter Phase folgendes sehen: In gröfseren Abständen ergiebt sich Abstofsung; aber innerhalb eines Abstandes, welcher der Gröfsenordnung nach durch die Formel (b) gegeben ist, tritt starke Anziehung ein. Da die Körper nicht Kugelform haben, und da der kritische Abstand nicht grofs im Vergleich zu den Dimensionen der Körper ist, wird selbstverständlich nur von einer Übereinstimmung der Gröfsenordnung und nicht von einer exakten die Rede sein können.

Um den anderen Fall zu prüfen, kann man sich einen Pulsator herstellen, wo als Pulsationskörper ein aufgeblasener Gummiballon dient, welcher seine Zufuhr an Luft von unten durch eine biegsame Kautschukröhre erhält. Man prüft erst, ob dieser Ballon in aufgeblasenem Zustande wirklich wie ein leichter Körper wirkt, indem man ihn in die Nähe des Pulsationskörpers der Pulsationswage bringt. Dieser mufs dann kräftig abgestofsen werden. Gelingt dies, so kann man dem Ballon gleichnamige, aber sehr schwache, etwa zehn- bis zwanzig Mal schwächere Pulsationen als dem anderen Körper geben. Man wird dann sehen, dafs der bewegliche Pul-

sationskörper in hinlänglich kleinen Abständen abgestoſsen, in gröſseren dagegen angezogen wird und in einem gewissen Abstande, welcher der Gröſsenordnung nach durch (a) gegeben ist, stabiles Gleichgewicht hat. Tauscht man um, so daſs der Ballon die starken und der schwere Pulsationskörper die schwachen Pulsationen erhält, und ändert gleichzeitig die Phase, so kommt man zu dem früheren Fall der Anziehung innerhalb und Abstoſsung auſserhalb des kritischen Abstandes zurück. Es zeigt sich dabei zugleich, daſs der kritische Abstand in diesem Falle etwas kleiner als im anderen ist, wie es die Formeln verlangen.

Ähnliche Versuche kann man auch mit den oscillierenden Kugeln ausführen. Die gewöhnlichen Kugeln des Oscillators oder der Oscillationswage sind als schwer zu betrachten. Man stellt in der Weise ein, daſs man, nach den permanenten Oscillationen zu urteilen, Abstoſsung zu erwarten hat, giebt aber der einen Kugel zehn- bis zwanzigmal kleinere Amplituden als der anderen. In gröſseren Abständen ergiebt sich dann immer Abstoſsung, in hinlänglich kleinen dagegen Anziehung. Der umgekehrte Versuch, wo die permanente Kraft anziehend und die temporäre abstoſsend wirkt, wäre sicher auch ausführbar, wenn man einen Oscillator mit hinlänglich kleinem inneren Kern herstellte und die Luft durch biegsame Schläuche von unten zuführte.

Der entsprechende Versuch mit Stahlmagneten ist leicht ausführbar, und hat für die Theorie der Magnete ein bedeutendes Interesse. Man nehme einen starken und einen schwachen Magnet und bringe den einen beweglich an. Die gleichnamigen Pole werden einander dann in hinlänglich groſsen Abständen abstoſsen. Innerhalb eines gewissen kritischen Abstandes verändert sich aber die Abstoſsung in Anziehung. Es ist wichtig hervorzuheben, daſs dies nicht auf einer permanenten Ummagnetisirung des schwachen Magnetes beruht. Denn der Versuch läſst sich, genau wie der hydrodynamische, beliebig viele Male wiederholen. Nur wenn allzu starke magnetische Kräfte ins Spiel treten, oder wenn Erschütterungen hinzukommen, tritt eine permanente Ummagnetisierung ein. Es kann sich also im Magnetismus eine temporäre Magnetisierung über die schon vorhandene permanente überlagern ohne sie zu stören, genau wie sich in dem hydrodynamischen Versuche die temporären Oscillationen ohne jede Störung über die permanenten lagern können.

Entsprechende Versuche mit permanenten Magneten aus diamagnetischer Substanz sind denkbar, aber kaum in der Wirklichkeit ausführbar. Insofern ist, kann man sagen, das hydrodynamische

Bild des magnetischen Erscheinungskomplexes vollständiger als dieser Komplex selbst.

**92. Einfluſs der Starrheit der Kugeln.** — Bis jetzt sind wir nur Übereinstimmungen zwischen den hydrodynamischen Erscheinungen und den magnetischen begegnet, von dem einen durchgehenden Unterschied abgesehen, der sich auf das Vorzeichen der Kräfte bezieht. Ein Unterschied anderer Natur tritt aber bei den folgenden Versuchen auf.

Man nehme als leichten Körper einen hohlen Celluloidball von 9 cm Durchmesser und benutze als Pulsationskörper eine gewöhnliche Trommel von 5 cm Durchmesser. Der Celluloidball wird dann in gröſseren Abständen abgestoſsen. Wenn aber der kleinste Abstand des Balles von der Membran der Trommel kleiner als etwa anderthalb Centimeter wird, so geht die Abstoſsung in eine kräftige Anziehung über. Benutzt man die Pulsationswage, so zeigt sich das Gegenwirkungsprinzip gültig. Der pulsierende Körper wird von dem groſsen Celluloidball in gröſseren Abständen abgestoſsen, in kleineren angezogen. Nimmt man nacheinander immer kleinere Celluloidbälle, so wiederholt sich dasselbe, nur daſs der kritische Abstand immer kleiner wird, und wenn der Durchmesser des Balles kleiner als 4 bis 5 cm wird, so kann man die Anziehung gewöhnlich nicht mehr nachweisen. Doch gelingt es auch mit den kleineren Kugeln, wenn der Pulsator mit stark konkaver Membran pulsiert, und sich die Kugel in dieser Konkavität befindet. Auch kann man natürlich mit kleineren Pulsatoren die Anziehung der kleineren Bälle nachweisen.

Der Versuch läſst sich auch mit einem aufgeblasenen Gummiballon anstatt mit einem Celluloidball wiederholen. In dem oben (91) beschriebenen Versuche kann man deshalb, wenn man einen Ballon passender Gröſse wählt, eine zweimalige Umkehr der Kraftrichtung erhalten: in gröſseren Abständen hat man Anziehung wegen der gleichnamigen Pulsationen; in mittleren Abständen ergiebt sich Abstoſsung als Folge der temporären Kraft, welche der Ballon als leichter Körper ausübt; in den kleinsten Abständen tritt endlich wieder Anziehung ein als Folge der neuen, noch nicht untersuchten Kraft.

Ganz entsprechende Versuche lassen sich auch mit einer groſsen leichten Kugel und einer kleinen, permanent oscillierenden Kugel anstellen, wie schon Lord Kelvin theoretisch vorausgesagt und Herr Tatlock verificiert hat.[1]

---

[1] Philosophical Magazine 41, S. 428—29, 1871. Vergl. auch Bjerknes' Bemerkung, Göttinger Nachrichten 1877, S. 310.

Eine Erscheinung verwandter Natur ist offenbar auch die folgende: Der leichte cylindrische Körper stellt sich im allgemeinen transversal zu einer pulsierenden oder oscillierenden Kugel (90). Ist er aber sehr lang, so wird er auch in der longitudinalen Lage eine, wenn auch weniger stabile Gleichgewichtslage aufweisen.

Erscheinungen dieser Natur begegnet man im Magnetismus nicht. Eine Wismutkugel wird von dem Magnet abgestofsen, gleichviel ob sie grofs oder klein ist, und ein Wismutstab stellt sich transversal ein, ohne Rücksicht darauf, ob er etwas gröfsere oder kleinere Länge hat. Ein Bruch in der Analogie mit den magnetischen Erscheinungen ist insofern entschieden vorhanden.

Die Ursache der beschriebenen hydrodynamischen Erscheinungen läfst sich leicht durchschauen, obgleich wir die Fernwirkungsformeln für diesen Fall nicht explicite entwickelt haben.

Am einfachsten betrachten wir die Rückwirkung der leichten Kugel auf die pulsierende. Den Radialstrom, welchen die pulsierende Kugel erzeugt, können wir in der Umgebung der leichten in einen Parallel- und einen Deformationsstrom auflösen. Die Intensität des ersten nimmt umgekehrt quadratisch, die des zweiten umgekehrt kubisch ab. Dem Parallelstrom gegenüber reagiert die Kugel in der untersuchten Weise und veranlafst die temporäre Abstofsung der pulsierenden Kugel. Dem Deformationsstrom gegenüber mufs sie aber auch, weil sie ihre Kugelform beibehält, reagieren und erzeugt einen Reflexstrom, welcher in Figur 16, S. 91 des I. Bandes abgebildet ist. Die Geschwindigkeit in diesem Strome nimmt umgekehrt wie die vierte Potenz der Entfernung ab und da sich die pulsierende Kugel in diesem Strome befindet, wird sie von einer Kraft angegriffen, welche wie die umgekehrte dritte plus vierte, also siebente Potenz der Entfernung zwischen den zwei Körpern abnimmt. Man überzeugt sich auch ohne Schwierigkeit davon, dafs diese Kraft immer anziehend sein wird. Wie man die Rechnung zu führen hat, um diese Kraft quantitativ zu untersuchen, ist ohne weiteres klar. Will man andererseits die übrigens gleich grofse und entgegengesetzt gerichtete Kraft untersuchen, welche die pulsierende Kugel auf die neutrale ausübt, so hat man die in dem Ausdrucke **86**(f) des I. Bandes enthaltene Partialkraft niedrigster Ordnung zu untersuchen.

Auf diese Kräfte höherer Ordnung werden wir nicht genauer eingehen. Es genügt, auf ihre Existenz aufmerksam gemacht zu haben, sowie auf den Bruch in der Analogie mit den magnetischen Erscheinungen, welchen sie veranlassen. Nur fügen wir hinzu, dafs das Auftreten dieses Bruches nicht als ein Beweis aufgefafst werden

darf, dafs hier ein Punkt der Grenze gefunden ist, jenseits welcher jede Möglichkeit einer exakten Parallelisierung der magnetischen und der hydrodynamischen Erscheinungen aufhört. Alles was wir behaupten können reduciert sich darauf, dafs das Problem, wie wir es uns gestellt haben, nämlich über Kugeln, welche sich unter der strengen Bewahrung ihrer Kugelform durch die Flüssigkeit bewegen, nicht die Analogie über diesen Punkt hinaus zu verfolgen gestattet.

# Zehnter Abschnitt.

## Die Zusammensetzung temporärer Energiekräfte.

**93. Der fundamentale Unterschied zwischen den permanenten und den temporären Kräften.** — Wie tiefgreifend der Unterschied ist zwischen den Kräften, welche wir als die permanenten und die temporären trennen, tritt erst recht hervor, wenn wir die Gesetze ihrer Zusammensetzung untersuchen. Nach der Theorie werden die Kräfte permanenter Natur, welche von getrennten Kugeln ausgehen, sich ungestört superponieren. Dieses kann man auch leicht durch einfache Messungen innerhalb der Grenze der Genauigkeit der Versuche nachweisen. Für die temporären Kräfte kennt dagegen die Theorie kein Superpositionsprinzip. Die Kraft, welche zwei oder mehrere Kugeln auf einmal ausüben, ist im allgemeinen nicht die Vektorsumme derjenigen Kräfte, welche jede einzelne Kugel ausübt, wenn sie allein vorhanden ist.

In dieser Eigentümlichkeit folgen einander genau die Kräfte magnetischen und hydrodynamischen Ursprunges und lassen neue interessante Seiten der Analogie hervortreten. Des Vergleiches halber werden wir die korrespondierenden magnetischen und hydrodynamischen Versuche nebeneinander ausführen. Dabei beschränken wir uns auf den einfachsten Fall, wo die neutrale Kugel der Wirkung zweier magnetischer Pole, beziehungsweise zweier pulsierenden Kugeln ausgesetzt wird. Denn schon dieser Fall läfst die negative Eigenschaft von der Nichtgültigkeit des Superpositionsprinzipes in vollem Lichte hervortreten (vergl. I, **210—213**).

**94. Die Kraftwirkungen zweier magnetischer Pole auf ein Stück Eisen oder Wismut.** — Ein Kügelchen aus Eisen befestigen wir

auf einer Korkscheibe, welche auf der Oberfläche des Wassers schwimmt. Bringen wir über die Wasserfläche einen magnetischen Pol, so wird das Eisen angezogen, stellt sich vertikal unter dem Pol ein und hat hier stabiles Gleichgewicht. Genau dasselbe tritt ein, wenn der Pol im Wasser in passendem Abstand unter der Korkscheibe angebracht wird. Ebenso ist die Erscheinung ganz unabhängig davon, ob der Pol ein Nord- oder ein Südpol ist.

Es sei nun ein Nordpol unten im Wasser fest aufgestellt und das Eisenkügelchen habe seine stabile Gleichgewichtslage vertikal über ihm eingenommen. Bringt man dann einen Südpol symmetrisch oberhalb der Eisenkugel an, so bemerkt man nichts Auffälliges. Sie bleibt in ihrer Gleichgewichtslage stehen, nur noch stärker als früher festgehalten. Kehrt man aber den oberen Magnetstab um, so dafs die Eisenkugel zwischen zwei gleichnamige Pole kommt, so wird sie sofort diese Lage verlassen. Sie wird abgestofsen, bis sie in einen Abstand von der Vertikalen durch die zwei Pole kommt, welcher angenähert ein Drittel des Abstandes zwischen den Polen beträgt. Die frühere Lage stabilen Gleichgewichtes ist jetzt instabil geworden. Stabiles Gleichgewicht herrscht dagegen auf einem Kreis, welcher diese instabile Lage als Mittelpunkt hat und dessen Radius etwa ein Drittel des Abstandes zwischen den Polen ist.

Dieses Resultat steht in offenbarem Widerspruch mit dem Prinzipe von der ungestörten Superposition der Einzelkräfte. Um es deutlich zu sehen, denken wir uns, dafs sich die Eisenkugel irgendwo zwischen der stabilen und der instabilen Gleichgewichtslage befindet. Ist dann nur ein Pol vorhanden, so wird die Eisenkugel angezogen. Wenn dagegen beide gleichzeitig vorhanden sind, wird sie abgestofsen. Zwei anziehende Einzelkräfte haben also eine abstofsende Resultante. Die Resultante kann folglich nicht die Vektorsumme der Einzelkräfte sein. Wenn man messende Versuche ausführt, so findet man allgemeiner, dafs die Resultantkraft, welche die zwei Pole zusammen ausüben, auch wenn sie ungleichnamig sind, überhaupt nur in einigen Ausnahmelagen die Eigenschaft hat, die Vektorsumme der von den einzelnen Polen allein ausgeübten Kräfte zu sein. In allen anderen setzen sich die Kräfte nach komplicierteren Gesetzen zusammen.

Ganz entsprechende Versuche würde man mit zwei kräftigen Magneten und mit einem von der Korkscheibe getragenen Stück Wismut anstellen können. Wegen der Kleinheit der Kräfte macht man jedoch den Versuch besser in der Luft, benutzt zwei kräftige

Elektromagnete und bringt das Wismut auf dem Arme einer empfindlichen Torsionswage an. Das Resultat ist das folgende: Solange nur ein Pol vorhanden ist, wird die Wismutkugel abgestofsen und hat in gröfster Nähe des Poles instabiles Gleichgewicht. Wird auch der zweite Pol angebracht, so tritt nichts Auffälliges ein, solange derselbe mit dem ersten ungleichnamig ist. Sind aber die zwei Pole gleichnamig, so wird die Wismutkugel nach dem Mittelpunkte zwischen den zwei Polen hin angezogen. Erst aufserhalb eines Abstandes, welcher etwa ein Drittel des Abstandes zwischen den Polen beträgt, tritt wieder die Abstofsung ein. Innerhalb dieser kritischen Lage haben wir also das auffällige Verhalten, dafs sich zwei abstofsende Einzelkräfte zu einer anziehenden Resultante zusammensetzen.

**95. Die Kraftwirkungen zweier pulsierender Körper auf eine schwere oder auf eine leichte Kugel.** — Um zunächst den analogen Versuch mit zwei pulsierenden Körpern und mit einer schweren Kugel anzustellen, kann man zwei Pulsationstrommeln mit rechtwinklig gebogenen Zuleitungsröhren vertikal übereinander stellen (Figur 40 a). Zwischen diese Trommeln bringt man eine Kugel aus Metall oder Siegellack, welche in der Mitte eines an zwei schwimmenden Korken aufgehängten Drahtes befestigt ist (Figur 40 a). Bei dieser Aufstellung kann man nacheinander entweder nur die obere oder nur die untere Trommel, oder auch gleichzeitig beide mit der Pumpe in Verbindung setzen.

Pulsiert nur eine Trommel, so wird die schwere Kugel immer angezogen und hat stabiles Gleichgewicht in der Vertikale durch den Mittelpunkt der Trommel. Pulsieren beide, und zwar entgegengesetzt, so tritt qualitativ dasselbe ein. Die schwere Kugel wird fortwährend angezogen und nur noch stärker als früher in der Gleichgewichtslage festgehalten.

Verändert man aber die Phase, so dafs die zwei Körper gleiche Pulsationen ausführen, also gleichnamigen Polen entsprechen, so wird die schwere Kugel abgestofsen und findet auf einer Kreisperipherie, deren Radius etwa ein Drittel des Abstandes zwischen den pulsierenden Körpern beträgt, stabiles Gleichgewicht. Aufserhalb dieses Kreises wird sie angezogen, innerhalb abgestofsen, und im Mittelpunkte zwischen den beiden pulsierenden Kugeln hat sie instabiles Gleichgewicht.

Will man den Versuch mit der leichten Kugel anstellen, so ist die Aufstellung mit horizontaler Verbindungslinie der zwei pul-

sierenden Körper die bequemste (Figur 40b), weil man dann die leichte Kugel mit der in den Figuren 38b oder c angegebenen Anordnung benutzen kann. Pulsiert nun nur die eine Trommel Figur 40a, so wird die leichte Kugel immer abgestofsen. Pulsieren beide, und zwar entgegengesetzt, so erhält man fortwährend Abstofsung, welche in dem Raume zwischen den zwei pulsierenden Körpern nur noch stärker ist. In dem Mittelpunkte zwischen denselben herrscht instabiles Gleichgewicht. Verändert man aber die Phase, so dafs die zwei Körper gleich pulsieren, so wird die leichte Kugel in kleinen

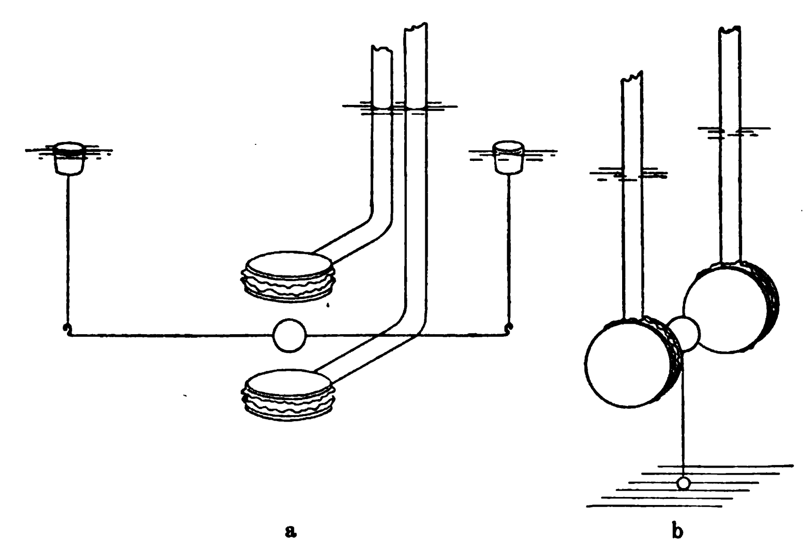



Fig. 40. Schwere Kugel (a), und leichte Kugel (b) zwischen zwei pulsierenden Körpern.

Abständen zu dem Mittelpunkte angezogen und hier herrscht jetzt stabiles Gleichgewicht. Aufserhalb eines kritischen Abstandes, welcher etwa ein Drittel des Abstandes zwischen den pulsierenden Körpern beträgt, tritt dagegen wieder die Abstofsung ein und in dem kritischen Abstande herrscht instabiles Gleichgewicht.

In allen Fällen bewegt sich also die schwere Kugel wie das Eisen und die leichte wie das Wismut. Die von den pulsierenden Körpern und die von den Polen ausgehenden Einzelkräfte setzen sich nach demselben überraschenden Gesetze zusammen. In beiden Fällen haben wir denselben offenbaren Widerspruch mit dem Superpositionsprinzipe. Schliefslich sei hinzugefügt, dafs man natürlich auch nicht hier vergessen darf, dafs aus zwingenden Gründen die

leichte Kugel mit dem Eisen, und die schwere mit dem Wismut zu vergleichen ist (87), so daſs die Analogie immer ihre frühere inverse Natur beibehält.

Diese Versuche wurden im Herbste 1880 in C. A. Bjerknes' hydrodynamischem Laboratorium ausgeführt.[1] Wir erwähnen zuletzt noch, daſs man eine ganze Reihe von verwandten, aber mehr zusammengesetzten Versuchen ausführen kann. Die leichte oder die schwere Kugel kann man zwischen eine pulsierende und eine oscillierende, oder auch zwischen zwei oscillierende Kugeln bringen und dabei die Achsen der letzteren in verschiedenartiger Weise einstellen. Analog kann man die Eisen- oder die Wismutkugel zwischen einen Magnetpol und einen Magnet oder zwischen zwei Magnete bringen. Man begegnet dann einer Reihe von Fällen, wo die Resultantkraft die überraschendsten Beziehungen zu den Einzelkräften hat, und dabei setzt sich die Analogie der hydrodynamischen Erscheinungen zu den magnetischen bis in die kleinsten Einzelheiten fort. Nur ist es in allen Fällen wichtig, die leichte und die schwere Kugel hinlänglich klein zu wählen, um jede Störung durch solche Kräfte (92) zu vermeiden, die auf der Starrheit der Kugeln beruhen.

**96. Diskussion.** — Die beschriebenen Versuche zeigen nicht nur eine auffällige Analogie zwischen den ohne weiteres beobachtbaren Wirkungen der magnetischen und der hydrodynamischen Fernkräfte. Sie deuten auch auf eine tiefere Verwandtschaft der nicht mehr direkt beobachtbaren dahinterliegenden Erscheinungen hin.

Der magnetische Versuch giebt wie der hydrodynamische zunächst das negative Resultat, daſs man die ponderomotorischen Einzelkräfte nicht direkt zusammensetzen darf. Um die Gesamtkraft zu finden, muſs man notwendig einen Umweg einschlagen und einen solchen, welcher im Magnetismus zum Ziele führt, hat zuerst Poisson angegeben. Nach der Poisson'schen Theorie sind die ponderomotorischen Kräfte als abhängige, sekundäre Erscheinungen aufzufassen, und als das Primäre die temporäre Magnetisierung. Die Interpretation des Versuches mit der Eisenkugel zwischen den zwei gleichnamigen Polen wird deshalb im Sinne dieser Theorie die folgende.

Der Pol $N_1$ (Figur 41a) induciert in der Eisenkugel ein mag-

[1] C. A. Bjerknes, Videnskabsselskabets Forhandlinger, Christiania, 10. Dezember 1880.

netisches Moment $sn_1$. Ganz entsprechend induciert der Pol $N_2$ ein magnetisches Moment $sn_2$. Diese inducierten Magnetisierungen superponieren sich ohne einander zu stören. Die Eisenkugel wird also zu einem temporären Magnet, dessen Moment $sn$ man einfach als die Vektorsumme der zwei einzelnen Momente $sn_1$ und $sn_2$ findet.

Erst nachdem somit der Magnetisierungszustand gefunden ist, ist es gestattet, die ponderomotorischen Kräfte zu betrachten. Und die Ursache der beschriebenen auffälligen Erscheinungen ist dann sofort klar. Der Südpol $s$ des temporären Magnetes wird allerdings

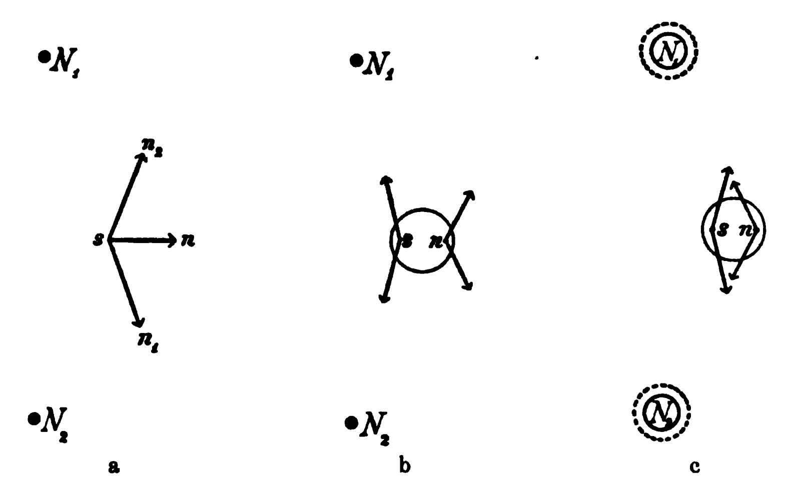



Fig. 41. Zusammensetzung temporärer Kräfte.

von zwei stärkeren anziehenden, der Nordpol $n$ von zwei schwächeren abstofsenden Kräften angegriffen (Figur 41b). Solange sich aber die Eisenkugel hinlänglich nahe an der Verbindungslinie der zwei Pole befindet, setzen sich die zwei schwächeren Kräfte unter einem vorteilhafteren Winkel zusammen und das Resultat wird die bei dem Versuche beobachtete Abstofsung sein.

Welches auch der innere Wert dieser Poisson'schen Theorie sein mag, so gestattet sie erfahrungsgemäfs die Erscheinungen rechnend zu verfolgen. Ihre Betrachtungen lassen sich auch Wort für Wort wiederholen, wenn es sich um das hydrodynamische Bild der magnetischen Erscheinungen handelt. Die hydrodynamische Fernkraft ist die Summe zweier Partialkräfte, der inducierenden, welche unsichtbare Bewegungen, und der energetischen, welche sichtbare, progressive Bewegungen zur Folge hat. Die inducierende

Wirkung versetzt die ursprünglich neutrale Kugel in die kleinen Schwingungen, welche der Magnetisierung der ursprünglich neutralen Eisenkugel entsprechen. Ist sie leichter als die Flüssigkeit, so daſs ihre inducierten Oscillationen nicht nur absolut, sondern auch relativ gerechnet, mit dem Strome verlaufen, so wird die Figur 41a die Induktionserscheinung auch im hydrodynamischen Falle geben. Die inducierten Aktionsmomente der Kugel setzen sich wie die inducierten magnetischen Momente nach dem Parallelogrammgesetze zusammen. Erst als Folge dieser inducierten Oscillationen tritt die progressiv bewegende Kraft auf. Diese ist aber der entsprechenden magnetischen invers analog. Der Pol *s* wird von den stärkeren abstoſsenden, der Pol *n* von den schwächeren anziehenden Kräften angegriffen (Figur 41c). Die letzteren setzen sich aber unter dem vorteilhafteren Winkel zusammen und die leichte Kugel wird von den zwei pulsierenden Körpern zusammen angezogen, obgleich sie von jedem einzelnen abgestoſsen wird.

Der einzige Unterschied der magnetischen und der hydrodynamischen Erscheinungen wird also der, welcher aus dem verkehrten Polgesetze folgt: Die leichte Kugel, welche dem Eisen entspricht, verhält sich, was die sichtbaren Bewegungen betrifft, wie das Wismut. Und entsprechend verhält sich die schwere Kugel, welche dem Wismut entspricht, in Bezug auf die sichtbaren Bewegungen wie das Eisen.

Auſser der Poisson'schen Interpretation der beschriebenen magnetischen Erscheinungen hat man noch eine andere, die Faraday'sche. Beide geben bei der Rechnung dieselben Resultate. Die zu Grunde liegenden physikalischen Ansichten sind aber weit verschieden. Nach Faraday existieren keine Fernkräfte, weder inducierende noch ponderomotorisch bewegende. Die Pole versetzen das umgebende Medium in einen Zustand der magnetischen Polarisation, und die Eisen- oder Wismutkugel erleidet Druckkräfte von Seiten der sie berührenden Teile des polarisierten Mediums. Diese Kräfte kann man auf den Zustand des Feldes beziehen und man findet das einfache Gesetz, daſs sie die Eisenkugel in der Richtung zunehmender und die Wismutkugel in der Richtung abnehmender Energie des Feldes zu treiben suchen. Die in unserem Versuche auftretenden Bewegungen erklären sich dann daraus, daſs im Mittelpunkte zwischen den zwei gleichnamigen Polen die Feldenergie ein Minimum, auf dem Kreise, welcher etwa ein Drittel des Polabstandes als Radius hatte, dagegen ein relatives Maximum besitzt.

Legt man diese Faraday'sche Auffassung der magnetischen Er-

scheinungen zu Grunde, so wird die Analogie mit den hydrodynamischen eine noch intimere. Denn die Vorstellung von hydrodynamischen Fernkräften, sei es inducierender oder energetischer Natur, ist künstlich eingeführt, weil sie für die Beschreibung einer gewissen Klasse von Erscheinungen zweckmäfsig ist. In Übereinstimmung mit der Wirklichkeit befinden wir uns aber, wenn wir in engstem Anschlufs an die FARADAY'sche Auffassung der magnetischen Erscheinungen die hydrodynamischen folgendermafsen beschreiben: die pulsierenden Körper versetzen die umgebende Flüssigkeit und die Flüssigkeit ihrerseits die Kugeln in einen Zustand von Schwingungen. Bei diesem Schwingungszustande übt die Flüssigkeit auf die Kugeln Drucke aus, welche Resultantkräfte nach einem dem FARADAY'schen Gesetze invers-analogen Gesetze veranlassen: die leichte Kugel wird in der Richtung abnehmender, die schwere in der Richtung zunehmender Energie des Stromfeldes getrieben [11 (A)]. Aus diesem Satze in Verbindung mit der bekannten geometrischen Ähnlichkeit des Stromfeldes zweier pulsierender Kugeln und des Kraftfeldes zweier magnetischer Pole (Vergl. Band I, S. 34, Figur 2 und Figur 51 a und b unten) folgt die inverse Analogie der hydrodynamischen und der magnetischen Kräfte.

# Elfter Abschnitt.

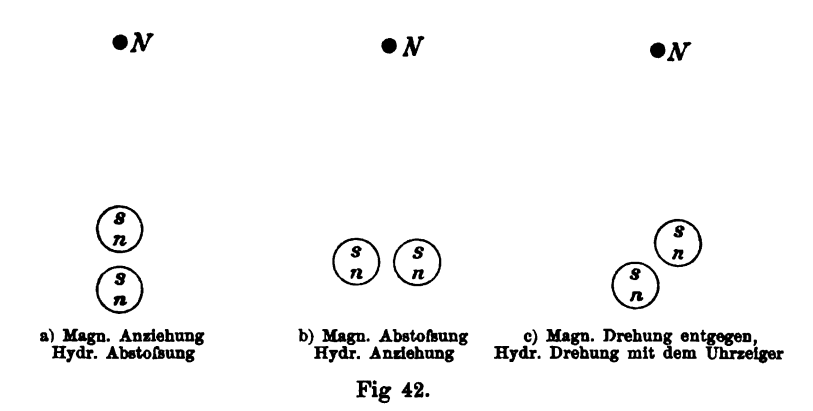
## Temporäre Kräfte in permanentem Strom- oder Kraftfelde.

**97. Wechselwirkungen zwischen Eisen- oder Wismutstücken in der Nähe eines Magnetes.** — Zu den einfachsten und bekanntesten magnetischen Erscheinungen gehören diejenigen, welche zwischen zwei oder mehreren Eisenstücken auftreten, wenn ein Magnet in ihre Nähe gebracht wird. Das in Figur 42 gegebene Schema giebt einen Überblick über die einfachsten Wechselwirkungen. Die Figur bezieht sich auf den Fall, dafs sich das permanent magnetische System auf einen einzigen Pol $N$ reduciert. Die Resultate lassen sich aber in der folgenden Form ganz allgemein aussprechen, indem man alles auf die Lage der Verbindungslinie der Kugeln relativ zu der Richtung der Kraftlinien in der unmittelbaren Umgebung bezieht.

Zwei Eisenkugeln ziehen einander an, wenn ihre Verbindungslinie längs der Kraftlinien gerichtet ist (Figur 42a). Sie stofsen

einander ab, wenn ihre Verbindungslinie senkrecht zu den Kraftlinien steht (Figur 42b). In den zwischenliegenden Azimuten hat man alle Übergänge zwischen der Anziehung und der Abstofsung, und daneben tritt ein Kräftepaar (Figur 42c) auf, welches die Verbindungslinie der Kugeln gegen die longitudinale Lage (a) hin zu drehen sucht.

Ersetzt man die Eisenkugeln durch solche aus Wismut, so bietet die Ausführung der Versuche praktische Schwierigkeiten dar. Man sieht aber leicht ein, welches das Resultat sein wird. Denn da alle vier Pole der zwei Kugeln auf einmal zu Polen entgegengesetzten Namens übergehen, so wird die Kraft ihre Richtung beibehalten. Auch die Wismutkugeln werden einander also in der Lage a anziehen, in der Lage b abstofsen, und in den Zwischenlagen das Drehungsmoment c erleiden.




a) Magn. Anziehung Hydr. Abstoßung — b) Magn. Abstoßung Hydr. Anziehung — c) Magn. Drehung entgegen, Hydr. Drehung mit dem Uhrzeiger

Fig 42.

Nimmt man dagegen eine Eisen- und eine Wismutkugel, so ist der Versuch wieder ausführbar, und man erhält die entgegengesetzten Kraftwirkungen, nämlich Abstofsung, wenn die Verbindungslinie der Kugeln längs der Kraftlinien gerichtet ist, Anziehung, wenn sie senkrecht zu den Kraftlinien steht, und in den zwischenliegenden Lagen ein Drehungsmoment, welches gegen die transversale Lage (b) hin zu drehen sucht.

Es geben diese Versuche wieder gute Beispiele der eigentümlichen Gesetze, nach welchen sich die temporären Kräfte zusammensetzen. In allen Fällen ist die Wirkung der Eisen- oder Wismutkugeln aufeinander Null, solange kein Pol $N$ vorhanden ist. Ist andererseits nur eine der Kugeln da, so übt der Pol $N$ auf ihn eine reine Anziehungs- oder Abstofsungskraft aus. Dadurch sind alle Einzelkräfte bekannt. Das Resultat der Zussammensetzung ist, dafs

sich die gegen $N$ gerichtete Kraft mit einer Kraft Null zu einer Kraft ganz anderer Richtung und Gröſsenordnung zusammensetzt. Es werden auch Versuche dieser Natur bei der Darstellung der Poisson'schen Theorie als die besten Belege dafür angeführt, daſs eine inducierende Wirkung der ponderomotorischen vorausgeht. Andererseits sind es auch Beobachtungen über Erscheinungen dieser Natur gewesen, welche ursprünglich Faraday von der herrschenden Fernwirkungslehre wegführten, und die Ausbildung der Vorstellung von den Feldern zur Folge hatten.

**98. Wechselwirkungen zwischen leichten und schweren Kugeln im oscillierenden Strome.** — Die entsprechenden hydrodynamischen Versuche gelingen, wenn man einige Sorgfalt anwendet, ebenfalls.

Die hauptsächlichsten Schwierigkeiten sind von zweierlei Art: Teils kann die direkte Wirkung des permanent pulsierenden oder oscillierenden Körpers die Oberhand gewinnen über die Wirkungen, welche die zwei Kugeln aufeinander ausüben, teils können die gebildeten Ströme in der gewöhnlichen Weise störend eingreifen. Die erste Schwierigkeit überwindet man so, daſs man die beiden Kugeln möglichst klein nimmt, und sie sehr nahe aneinander bringt, während der Abstand von dem permanent pulsierenden oder oscillierenden Körper verhältnismäſsig groſs gewählt wird. Das Feld, in dem sich die zwei Kugeln befinden, kann dann angenähert als ein Parallelfeld betrachtet werden, und die direkte Wirkung des permanent schwingenden Systems wird verhältnismäſsig schwach im Vergleich zu der Wechselwirkung der beiden Kugeln. Eine angenäherte Kompensation der direkten Wirkung kann man auch erhalten, wenn man die zwei Kugeln zwischen zwei entgegengesetzt pulsierende Körper bringt. Den Einfluſs der Ströme eliminiert man in derselben Weise wie früher: Man stellt die Verbindung mit dem Generator nur während einer oder ein paar Sekunden her, und in dieser kurzen Zeit haben die Ströme nicht Zeit sich zu entwickeln oder die Kugeln zu erreichen. Der erste Ausschlag ist dann die unverfälschte Wirkung der hydrodynamischen Fernkraft.

Am einfachsten benutzt man die pendelförmige Aufhängung der Kugeln, und sehr zweckmäſsig befestigt man sowohl die zwei leichten wie die zwei schweren Kugeln an einem und demselben Faden (Figur 43), den man über zwei Glasstäben aufhängt. Der Abstand zwischen den Glasstäben reguliert dann den Abstand der Kugeln. Durch einfaches Umlegen des Fadens kann man erreichen, daſs entweder die zwei oberen (leichten) Kugeln, oder auch die zwei

unteren (schweren), oder schliefslich eine der oberen und eine der unteren (eine leichte und eine schwere) in gleiches Niveau nebeneinander kommen. Diese zwei werden dann auch mit dem pulsierenden oder oscillierenden Systeme in gleiches Niveau gebracht, und ihre Wechselwirkungen untersucht.

Führt man dann die Versuche in der angegebenen Weise aus, so ergeben sich die folgenden Resultate:

Zwei leichte Kugeln und ebenfalls zwei schwere ziehen einander an, wenn ihre Verbindungslinie senkrecht zu der Richtung der Stromlinien steht (Figur 42b). Sie stofsen einander ab, wenn ihre

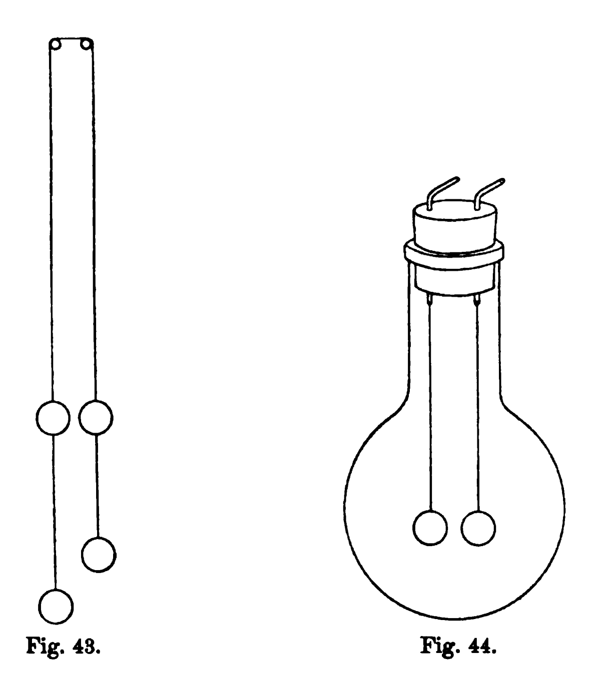


Fig. 43. Fig. 44.

Verbindungslinie längs der Richtung der Stromlinien fällt (Figur 42a). Die Verbindungslinie der Kugeln dreht sich gegen die zu den Stromlinien senkrechte Lage, wenn sie in der Ausgangslage einen von Null oder $\frac{\pi}{2}$ verschiedenen Winkel mit den Stromlinien bildet (Figur 42c).

Eine leichte und eine schwere Kugel ziehen einander an, wenn ihre Verbindungslinie mit der Richtung der Stromlinien zusammenfällt. Sie stofsen einander ab, wenn ihre Verbindungslinie zu der Richtung der Stromlinien senkrecht ist. Wenn ihre Verbindungslinie einen von Null oder von $\frac{\pi}{2}$ verschiedenen Winkel mit den

Stromlinien bildet, wird sie so gedreht, dafs ihr Winkel mit den Stromlinien sich verkleinert.

Die Versuche gelingen jedoch durchgehend nur, wenn man grofse Sorgfalt anwendet. Die Kräfte sind schwach, und Störungen, teils durch die direkte Fernwirkung des permanent pulsierenden oder oscillierenden Systems, teils durch die gebildeten Ströme, sind schwer vollständig zu beseitigen. Alle diese Schwierigkeiten vermeidet man, wenn man die Versuche in einem wirklichen Parallelfelde macht.

Die Kugeln in Figur 43 kann man ganz einfach in einem Glas Wasser herunterhängen lassen, und das Glas mit den Händen hin und her schieben. Dabei stören jedoch die auf der Oberfläche gebildeten Wellen. Noch besser hängt man deshalb die ganzen Pendelvorrichtungen in einer geschlossenen, und ganz mit Wasser gefüllten Flasche auf (Figur 44). Ohne jede Störung durch Wellenbildung kann man die Flasche beliebig stark in den Händen schütteln, oder sie auch mit Hilfe einer mit dem Generator kommunicierenden Trommel in Oscillation setzen. Innerhalb der Flasche entsteht ein exaktes Parallelfeld, und es bilden sich keine merkbaren Ströme, so dafs die zwei wichtigsten Ursachen der Störung wegfallen. Die zwei leichten Kugeln hängt man dann von unten, die zwei schweren von oben auf. Um die Wechselwirkung einer leichten und einer schweren Kugel zu erhalten, benutzt man am besten die Anordnung mit einer leichten und einer schweren Kugel an jedem Faden. Der gröfseren Empfindlichkeit halber ist diese Anordnung auch für die Untersuchung der Wechselwirkungen zwischen zwei gleich schweren Kugeln sehr zu empfehlen. Die Versuche gelingen mit der gröfsten Präcision in Abständen bis zu zwei oder drei Kugeldurchmessern aufwärts. Dabei tritt auch die den völlig freien Körpern eigene Instabilität der Abstofsungslage auf (**30**, **31**). Neben der Abstofsung macht sich bei der kleinsten Schiefheit der Aufstellung auch die Drehung geltend, und führt zu der Anziehungslage, von wo sich die Kugeln bis zur Berührung gegeneinander nähern.

**99. Kraftlinien- und Äquipotential-Flächenbilder.** — Die durch die Figur 42 veranschaulichte anziehenden, abstofsenden und drehenden Wirkungen zwischen Eisenstücken sind es, welche der bekannten Bildung der Kraftlinienfiguren mit Eisenfeilspänen zu Grunde liegen. Ähnliche Kräfte, nur immer in der entgegengesetzten Richtung, treten auch zwischen kleinen im Wasser schwebenden schweren oder

leichten Partikelchen auf. Man hat deshalb zu erwarten, dafs sie sich ordnen werden, nur nicht wie die Eisenfeilspäne in Kurven längs den Kraft- oder Stromlinien, sondern in Flächen senkrecht zu denselben, also längs den Äquipotentialflächen (vergl. I, **216**).

Versuche, dies nachzuweisen, wurden auch in den Jahren 1879 und 1880 mehrmals, aber ohne Erfolg gemacht. Als Ersatz wurden dann in den Jahren 1881—82 die eben beschriebenen Versuche mit der Wechselwirkung zwischen zwei aufgehängten schweren oder leichten Kugeln angestellt, welche jedenfalls das Vorhandensein der fraglichen Kräfte unzweifelhaft machten, selbst wenn der Hauptversuch gescheitert war. Und doch lag zu dieser Zeit schon längst ein klassischer Versuch vor, welcher die vollständige Verifikation des theoretisch hydrodynamischen Resultates gab, nämlich der Versuch mit der Bildung der KUNDT'schen Staubfiguren. Den Gedanken, dafs die Bildung dieser Figuren auf der Wirkung hydrodynamischer Fernkräfte beruhe, und das Analogon zu der Bildung der magnetischen Kraftlinienfiguren sei, hat zuerst WALTHER KÖNIG gefafst, und nachher die vollständigen theoretischen und experimentellen Belege für die Richtigkeit dieser Ansicht erbracht.[1]

Wenn der Versuch mit Luftschwingungen gelingt, so liegt kein Grund vor, zu zweifeln, dafs es auch in den durch pulsierende oder oscillierende Körper in Schwingungen versetzten Wassermassen gelingen kann, wenn man nur die vorteilhaftesten Versuchsbedingungen aussucht. Der Versuch hat schliefslich auch Erfolg gehabt, nachdem die neueren und vollkommeneren Instrumente zur Verwendung gebracht werden konnten, und nachdem ein passendes Pulver gefunden war.

Die Forderungen, die man an das Pulver stellen mufs, sind die, dafs es möglichst schwer und passend fein sei. Ein sehr brauchbares Pulver kann man durch fraktionierte Schlämmung aus käuflicher Mennige erhalten. Bei der Herstellung der unten wiedergegebenen Figuren wurde ein solches benutzt, aus dem alles entfernt war, was in den Bechergläsern in kürzerer Zeit als einer halben, und in längerer Zeit als einer Minute zu Boden sank. Doch ist ein etwas gröberes Pulver auch schon brauchbar; sehr viel feiner darf es aber nicht sein. Andere gute Pulver kann man aus Feilspänen von Metallen erhalten, indem man durch Sichtung oder Schlämmung das zu grobe und zu feine Material ausscheidet.

---

[1] W. KÖNIG, Kgl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften, 10. Februar 1890, S. 46. Wied. Ann. 42, S. 353; 42, S. 549; 43, S. 43, 1891.

Was den Versuch betrifft, so zeigt es sich vorteilhaft, den Generatorbetrieb aufs äufserste zu forcieren, bis zu fünfzig Schlägen in der Sekunde oder mehr. Die Figur bildet sich dann in kurzer Zeit aus. Setzt man den Betrieb weiter fort, so wird die Figur meistens schlechter. Teils nähern sich die fertig gebildeten Rippen wegen der Anziehung den pulsierenden oder oscillierenden Körpern, und es häufen sich dort grofse Massen auf, während die ferneren Partien von Pulver entblöfst werden. Teils können sich die Ströme in unvorteilhafter Weise geltend machen und das Pulver wegfegen, oder die fertig gebildeten Wälle deformieren. Das beste ist deshalb hier, wie überhaupt oft bei den Versuchen mit temporären Kräften, dafs man während einer sehr kurzen Zeit einen sehr intensen Betrieb anwendet. Dies läfst sich auf zweierlei Weise erreichen. Entweder stellt man nur während einer kurzen Zeit die Verbindung der Pulsatoren oder der Oscillatoren mit dem Generator her, oder man hat die Pulsatoren oder Oscillatoren in stetiger Verbindung mit dem Generator, bringt sie aber nur während einer sehr kurzen Zeit in die Nähe der mit Pulver bestreuten Stelle.

Wünscht man die gebildeten Figuren aufzubewahren, so kann man sie auf losen Glasplatten herstellen, die man nachher vorsichtig aus dem Wasser herausnimmt. Während sie noch nafs sind, bestreut man sie mit pulverisiertem Gummi (sehr wenig); nachher können die getrockneten Platten gefirnifst werden. Die Figuren 45 bis 48 sind nach photographischen Kopien solcher Platten hergestellt.

Im Falle Figur 45 wurde ein einziger Pulsator von der Ballonform (Figur 18a) unmittelbar über der mit Mennige bestreuten Platte angebracht, und es bildeten sich die cirkulären Figuren, welche die Schnittlinien der Äquipotentialflächen mit der Ebene der Glasplatte sind. Die Kreise sind die Normalkurven zu den radialen Strahlen, welche man im entsprechenden magnetischen Versuche mit einem Magnetpole und Eisenfeilspänen erhält (vergl. Figur 50b unten).

Im Falle Figur 46 wurden zwei gleich pulsierende Ballons unmittelbar über der bestreuten Glasplatte angebracht. Die gebildeten lemniskatischen Kurven sind die Normalkurven zu den mit Eisenfeilspänen erhaltenen Kurven (Figur 51), welche von zwei gleichnamigen magnetischen Polen gebildet sind.

Im Falle Figur 47 waren die zwei Pole ungleichnamig, und die Kurven sind die Normalkurven zu denjenigen Linien, welche die Eisenfeilspäne in der Umgebung zweier ungleichnamiger Pole bilden (Figur 52 unten).

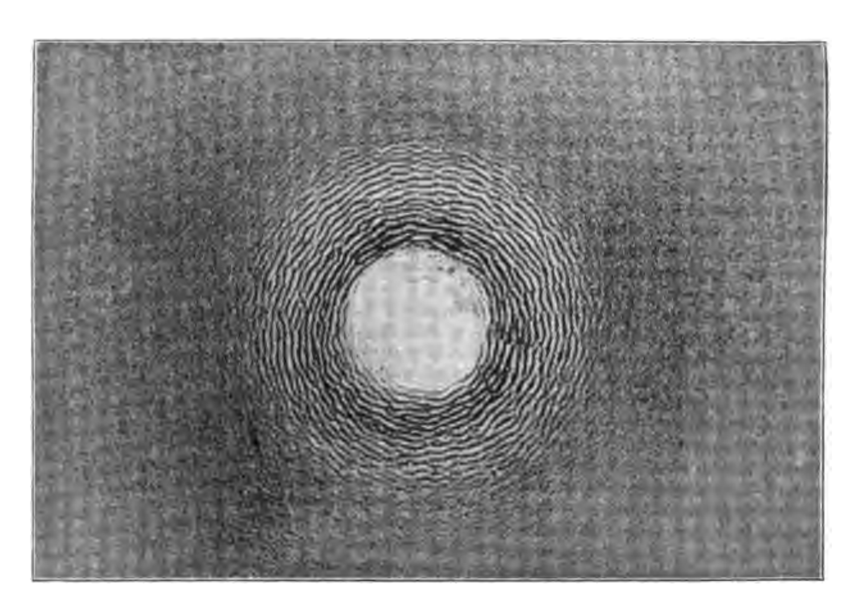


Fig. 45. Staubfiguren, gebildet unter den Einfluss eines pulsierenden Körpers. (Massstab $^2/_3$.)

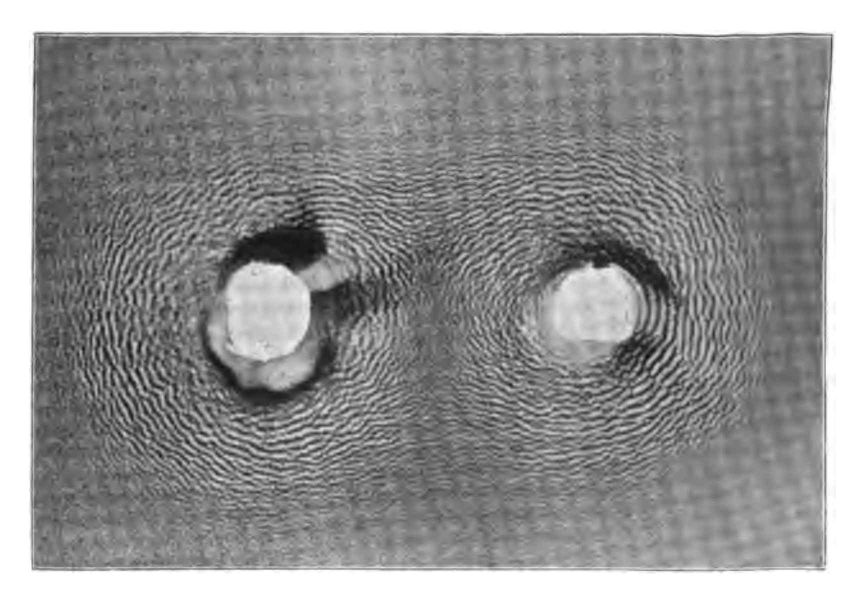


Fig. 46. Staubfiguren, gebildet unter den Einfluss zweier gleich pulsierender Körper. (Massstab $^2/_3$.)

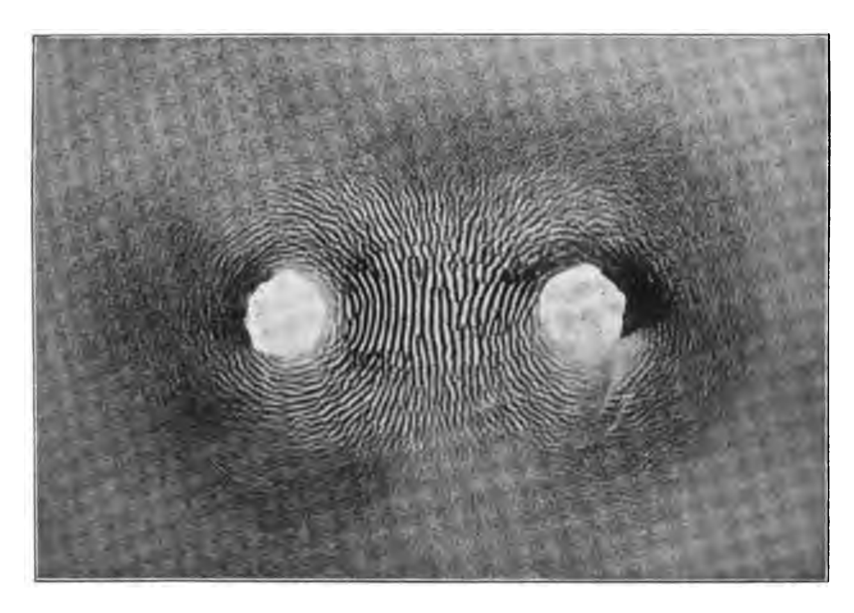


Fig. 47. Staubfiguren, gebildet unter den Einfluss zweier entgegengesetzt pulsierender Körper. (Massstab $^2/_3$.)

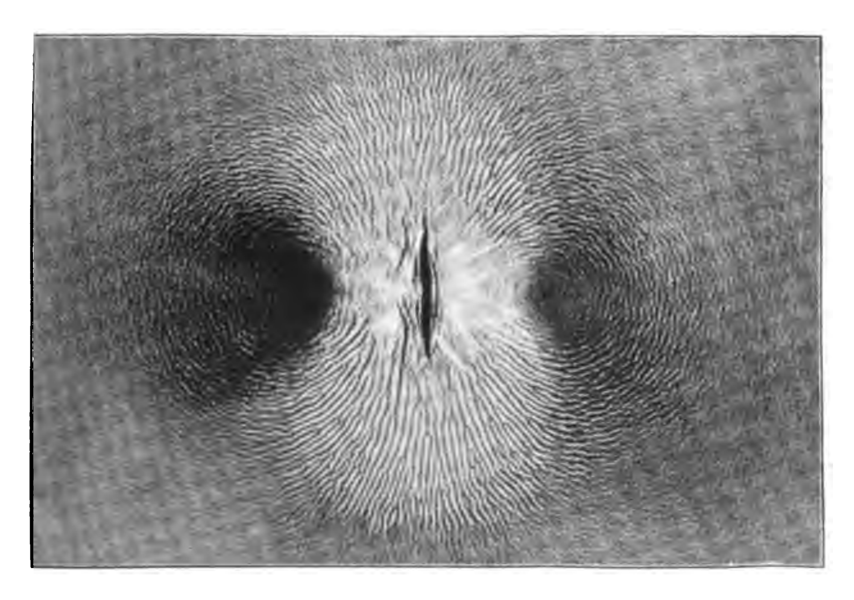


Fig. 48. Staubfiguren, gebildet unter den Einfluss einer oscillierenden Kugel (Oscillationsrichtung horizontal). (Massstab $^2/_3$.)

Figur 48 endlich giebt den Fall an, wo eine oscillierende Kugel unmittelbar über der bestreuten Glasplatte angebracht war. Die Kurven haben denselben allgemeinen Verlauf wie die vorhergehenden (Figur 47), welche zwei entgegengesetzten, aber mit gleicher Intensität pulsierenden Kugeln entsprachen. Nur in der unmittelbaren Nähe der pulsierenden Körper hat man selbstverständlich Unterschiede. Andererseits sind die Kurven Normalkurven zu den Kraftlinien (Figur 53), welche einem kurzen Magnet entsprechen. Das schwarze, linsenförmige Gebilde in der Mitte der Figur ist ein Haufen, welcher sich durch die Anziehung der Mennigemassen gebildet hat. Die Wege, längs welchen kleine Mennigemassen gerutscht sind, treten auch als weiſse Streifen hervor. Bei fortgesetztem Betriebe schwillt dieser Haufen immer mehr an und wird breiter, während seine Umgebung von Pulver ganz entblöſst wird.

**100. Rippenbildungen im Sand.** — In den wiedergegebenen Abbildungen, und noch mehr auf den Originalplatten, wo das Relief hervortritt, zeigt sich eine auffällige Ähnlichkeit der Mennigefiguren mit den bekannten Rippungen, welche sich im Sande unter der Wirkung der Wellenschläge bilden, und welche auch in Stein als Marke der Wellenschläge in früheren geologischen Epochen aufbewahrt sind.

Die Wellenbewegung beruht bekanntlich auf elliptischen Oscillationen der Wasserpartikelchen, welche unten am Boden notwendig in geradlinige Oscillationen übergehen müssen. Insofern sind die Umstände bei der Bildung der Sandrippen genau dieselben wie bei der Bildung unserer Mennigerippen. Wie die Mennigerippen verlaufen sie immer senkrecht zu der Richtung der Wasseroscillationen. Man kann es besonders scharf in der Umgebung groſser Steine konstatieren. Denn die Wasserbewegung muſs längs der Oberfläche der Steine gerichtet sein, und man sieht, daſs die Sandrippen immer normal zu den Vertikalwänden der Steine enden. Auch an den Stellen, wo sich eine Rippe in zwei teilt, zeigen sich auffällige Übereinstimmungen. Diese Verzweigungspunkte sind immer mehr oder weniger instabile Punkte, wo ein Kampf um die Vereinigung beider Rippen zu einer einzigen oder um die Zerteilung der ganzen Rippe in zwei stattfindet.

Die genaueren Bedingungen, unter welchen sich die Sandrippen bilden, hat G. H. DARWIN[1] untersucht. Zunächst versteht man

[1] Proceedings of the Royal Society, London, 36, S. 18, 1883.

leicht, dafs sich in immer gleichgerichtetem Strome hinter jedem kleinen Hindernis ein Wirbel ausbilden mufs, dessen Achse senkrecht zu der Stromrichtung ist. Diese Wirbel müssen im Verlaufe der Zeit Thäler senkrecht zu der Stromrichtung ausschneiden, und jede zufällige Vertiefung oder Erhöhung in der ursprünglich ebenen Sanddecke wird dann als der Ausgangspunkt einer Rippenbildung dienen. In dieser Weise erklärt sich ungezwungen die Bildung der Sandrippen in stetig strömendem Wasser, welche man quer zu der Stromrichtung in gröfseren Flüssen findet, mit Abständen von Rippe zu Rippe, welche nach Metern zählen können, und ebenfalls die Bildung der grofsen Sanddünen in den Wüsten, welche sich quer zu der Richtung der vorherrschenden Winde ausdehnen, und wo der Abstand von Düne zu Düne Hunderte von Metern betragen kann. Man versteht die unsymmetrische Form dieser Rippen oder Dünen mit ihrem langsamen Ansteigen auf der Strom- oder Windseite und ihrem steilen Abfallen auf der Leeseite, wo der Wirbel arbeitet. Man versteht auch, dafs das Rippenfeld meistens weniger regelmäfsig sein wird, während doch unter sehr stationären Wind- oder Stromverhältnissen im Verlaufe der Zeit eine ausgeprägte Regelmäfsigkeit zu stande kommen kann. Schliefslich erklärt sich auch das bekannte langsame Fortschreiten der Rippen oder Dünen in der Richtung des Stromes oder des Windes.

Wenn man von einem stetigen zu einem mit sehr langer Periode oscillierenden Strome übergeht, so müssen die Wirbel in den Thälern bei jeder Umkehr des Stromes ihre Richtung umkehren. Die Ursachen einer dauernden Asymmetrie der Rippen fallen damit fort, aber die Bedingung für eine Rippenbildung durch die Wirbel bleibt im wesentlichen unverändert. Bei höheren Schwingungszahlen müssen sich aber die Verhältnisse komplicieren. Es entstehen dann nach Darwins Beobachtungen nicht einer, sondern bis zu vier Wirbeln zwischen je zwei Rippen. Wieviel diese Wirbel mit der weiteren Ausbildung der Form der schon entstandenen Rippen auch zu thun haben mögen, so ist es doch schwierig, die primäre Rippenbildung auf sie zurückzuführen. Vielmehr scheint das Vorhandensein der Rippen eine Vorbedingung für die Bildung der Wirbel zu sein. Wie sie beispielsweise bei unseren Versuchen in der gleichmäfsig verteilten Mennigeschicht hinlänglich viele und hinlänglich regelmäfsig verteilte Anhaltspunkte finden können, um das ganze Rippenfeld in voller Regelmäfsigkeit während weniger Sekunden hervorzuzaubern, scheint unbegreiflich.

Wenn es sich um hinlänglich schnelle Oscillationen handelt, so

bleibt deshalb nichts anderes übrig, als auf die ordnende Wirkung der hydrodynamischen Fernkräfte, auf deren Vorhandensein DARWIN nicht aufmerksam gewesen ist, zurückzugreifen, um die primäre Bildung der Rippen zu erklären. Andererseits ist aber auch nicht zu zweifeln, dafs, je mehr man zu langsamen Schwingungen mit grofsen Amplituden übergeht, um so mehr die Wirkung der hydrodynamischen Fernkräfte den Wirbeln gegenüber zurücktreten wird, um in dem Grenzfalle des stetigen Stromes bedeutungslos zu werden.

Zur weiteren Erläuterung wollen wir noch die Gröfsenordnung der auftretenden hydrodynamischen Fernkräfte berechnen. Die erste Formel I, **215** giebt die hydrodynamische Anziehungskraft, welche zwei Kugeln aufeinander ausüben. Wir setzen $Q_g = Q_k = Q$ und $E_g = E_k = E$, indem wir annehmen, dafs beide Kugeln gleiche Dichten und gleiche Volumina haben. Weiter setzen wir $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, in welchem Falle die gröfste Anziehung eintritt. Die Kraft wird dann

$$3\,q\left(\tfrac{3}{2}\,\delta\,\frac{q-Q}{Q+\frac{1}{2}q}\,E\right)^2\cdot\frac{1}{4\pi r^4}.$$

Diese Kraft können wir mit dem scheinbaren Gewichte jeder Kugel im Wasser vergleichen. Das Gewicht einer Kugel ist $QEg$ und der Auftrieb $qEg$, wo $g$ die Beschleunigung der Schwere ist. Das scheinbare Gewicht wird $(Q-q)Eg$, also das Verhältnis:

$$\frac{\text{Hydrodynamische Anziehung}}{\text{Scheinbare Schwere}} = \frac{3\,q}{Q-q}\cdot\left(\tfrac{3}{2}\,\delta\,\frac{q-Q}{Q+\frac{1}{2}q}\right)^2\cdot\frac{E}{4\pi r^4 g}.$$

Wir betrachten nun dieses Verhältnis, wenn es am gröfsten ist, nämlich wenn die zwei Kugeln in Berührung sind. Denn dieser Fall kommt in den Sand- oder Mennigemassen immer vor, und spielt folglich die Hauptrolle. Allerdings ist die Fernwirkungsformel dann nicht mehr exakt. Die vernachlässigten, auf den gegenseitigen Induktionen beruhenden Glieder würden aber die Kraft nur verstärkt haben. Wir setzen dann $r = D$, und indem wir auch das Volumen $E$ durch den Durchmesser $D$ ausdrücken, ergiebt sich:

$$\text{(a)}\quad \frac{\text{Hydrodynamische Anziehung}}{\text{Scheinbare Schwere}} = \frac{q}{Q-q}\left(\frac{q-Q}{Q+\frac{1}{2}q}\right)^2\cdot\frac{1}{8Dg}\cdot\left(\tfrac{3}{2}\,\delta\right)^2.$$

Die Verhältniszahl ist also dem Durchmesser der Kugeln umgekehrt proportional. Die Vorzüge eines feinkörnigen Pulvers werden dadurch völlig klar. Die Vorteile, die man durch Verfeinerung des Pulvers gewinnt, haben aber auch eine Grenze, welche auf der

Reibung des Wassers beruht. Denn die aufgestellte Formel verliert jede Gültigkeit, sobald das Pulver so klein wird, daſs es infolge der Reibung die Bewegung der Flüssigkeit genau mitmacht, anstatt infolge seiner gröſseren Trägheit relativ zu dem Wasser zurückzubleiben. Die Bedeutung, welche andererseits die Anwendung eines sehr schweren Pulvers hat, liegt darin, daſs man bedeutend weiter in der Verfeinerung des Pulvers gehen kann, ohne daſs die Reibung überhandnimmt.

Bei unseren Versuchen mit dem Mennigepulver, welches etwa die Dichte 9,5 hat, und welches unter dem Mikroskope durchschnittlichen Durchmesser von etwa 0,003 cm aufwies, wird nun:

$$\frac{q}{Q-q} = 0{,}118 \qquad \left(\frac{q-Q}{Q+\frac{1}{2}q}\right)^2 = 0{,}72 \qquad \frac{1}{8Dg} = 0{,}0425.$$

Es handelt sich zuletzt um den Wert der Oscillationsintensität $\vartheta$. Dieser ist von Versuch zu Versuch und von Stelle zu Stelle in einem und demselben Felde verschieden gewesen. Nehmen wir den einfachen Fall eines einzigen pulsierenden Körpers (Figur 45). In einem Abstande von mehr als 3 cm von dem Mittelpunkte des pulsierenden Ballons sind die Rippen noch voll entwickelt. Die Pulsationsamplitude ist etwa 6 cm³, und die Schwingungszahl etwa 50 gewesen. Dieses giebt (13 A) die Pulsationsintensität 1330. Die Division mit $4\pi r^2$, wo $r = 3$ zu setzen ist, giebt in diesem Abstande von 3 cm die Oscillationsintensität $\vartheta = \frac{1330}{113} = 11{,}8$, wonach

$$(\tfrac{3}{2}\vartheta)^2 = 313.$$

Zuletzt erhält man dann

$$\frac{\text{Hydrodynamische Anziehung}}{\text{Scheinbare Schwere}} = 1{,}13.$$

Darwin giebt ohne genauere Angaben an, daſs seine Versuche mit „feinem“ Sande ausgeführt sind. Rechnen wir mit dem spezifischen Gewichte 2,65 des Quarzes und mit einem Durchmesser der Körnchen von einem halben Millimeter oder 0,05 cm, so ergiebt sich für seine Versuche:

$$\frac{q}{Q-q} = 0{,}605 \qquad \left(\frac{q-Q}{Q+\frac{1}{2}q}\right)^2 = 0{,}273 \qquad \frac{1}{8Dg} = 0{,}00255.$$

Die Rippen bildeten sich nach Darwin's Angaben bei Oscillationsamplituden zwischen 2,5 und 7, sagen wir also im Mittel 4,7 Inches

oder etwa 12 cm. Dabei ist zu bemerken, dafs, wie man aus späteren Zahlenangaben schliefsen mufs, mit dem Worte „Amplitude“ der Abstand zwischen den Umkehrpunkten und nicht der Abstand eines Umkehrpunktes von der Mittellage gemeint ist. Nach unserer Terminologie wird also die Amplitude 6 cm. Gleichzeitig wurden 60—80 ganze Schwingungen in der Minute angewendet, also im Mittel 1,26 Schwingungen in der Sekunde. Dieses ergiebt (13 A) die Oscillationsintensität $\sigma = 33,3$, also:

$$\left(\tfrac{3}{2}\,\sigma\right)^2 = 2500.$$

Durch Einsetzen ergiebt sich schliefslich:

$$\frac{\text{Hydrodynamische Anziehung}}{\text{Scheinbare Schwere}} = 1,1.$$

Schon die Kraft, welche ein Sand- oder Mennigekörnchen auf ein anderes ausübt, kann also die Schwere überwiegen. Noch bedeutend gröfser kann selbstverständlich unter günstigen Umständen die Kraft werden, welche mehrere Körnchen zusammen ausüben, während selbst bedeutend kleinere Kräfte im Verlaufe der Zeit sicher auch ihre ordnende Wirkung geltend machen würden. Diese ordnende Wirkung der hydrodynamischen Fernkräfte dürfte deshalb die primäre Ursache sein, nicht nur bei der Bildung der Mennigefiguren in unseren Versuchen, sondern auch bei der Bildung der Sandrippen an den Ufern unter der Wirkung der Wellenschläge. Sobald die ersten Spuren von Rippen entstanden sind, werden sich aber auch die Wirbel in den Thälern ausbilden, und vielleicht die wichtigste Rolle bei dem späteren Ausmeifseln des Reliefs spielen.

## Zwölfter Abschnitt.

## Die hydrodynamische Induktionskraft und die Strombilder.

**101. Sichtbarmachen der Wirkungen der Induktionskraft.** — Wir haben oft auf die fundamentale Bedeutung hingewiesen, welche die Zerlegung der totalen hydrodynamischen Druckkraft in die zwei Partialkräfte, die Induktionskraft und die Energiekraft, für die Entwickelung der Theorie der hydrodynamischen Fernkräfte hatte. Andererseits hat es sich in unseren Versuchen gezeigt, dafs die

Zerlegung in eminentem Grade auch eine praktische war. Denn die Wirkungen der Induktionskraft sind in den allermeisten Fällen nicht beobachtbar geblieben, während die Energiekraft alle Aufmerksamkeit auf sich gezogen hat. Indirekt haben wir aber die grofse Bedeutung der Induktionskraft bei allen Versuchen über die temporären Fernkräfte kennen gelernt.

Bei hinlänglich grofsen Amplituden werden die Wirkungen der Induktionskraft sichtbar. Um sie unter den einfachsten Verhältnissen zu studieren, kann man sich bequem einer vollständig gefüllten Flasche (Figur 44) bedienen, in welcher eine einzige Kugel pendelförmig aufgehängt ist. Man sieht dann, wie die Kugel jede Translationsbewegung der Flasche wiedergiebt, und zwar in vergröfsertem Mafsstabe, wenn sie leichter, in verkleinertem, wenn sie schwerer als die Flüssigkeit ist. Wenn man die Flasche in einer solchen Weise an einer elastischen Vorrichtung befestigt, dafs sie in irgend einer LISSAJOUS'schen Kurve herumlaufen kann, so wird man sehen, wie die leichte oder die schwere Kugel dieselbe, nur in einem gewissen Verhältnisse vergröfserte oder verkleinerte LISSAJOUS'sche Kurve durchläuft. Dieses giebt die Verifikation des theoretischen Satzes I, **109**. Genauere Messungen, ob die Vergröfserung oder Verkleinerung in dem richtigen, durch die Dichtigkeiten bestimmten Verhältnisse stattfindet, sind jedoch nicht ausgeführt worden.

Das Hauptinteresse knüpft sich jedoch an das Sichtbarmachen der Wirkungen der Induktionskraft in den Stromfeldern, welche die pulsierenden oder oscillierenden Kugeln umgeben. Die Aufgabe mufste sich von selbst aufdrängen, nachdem in den Jahren 1879 bis 1880 die Herstellung solcher Bilder der hydrodynamischen Stromfelder, wie sie die Figuren 45—48 geben, gescheitert war. Denn die Induktionskraft ist immer längs der Stromlinien gerichtet, und mufs deshalb für die Erforschung dieser Linien verwertet werden können.

In diesen Stromfeldern begegnet man aber der Schwierigkeit, dafs die Amplituden in einigem Abstande von den pulsierenden oder oscillierenden Körpern bald mikroskopisch werden. Selbst die dreifache Vergröfserung, welche eine sehr leichte Kugel giebt, hilft nur wenig. Um noch stärkere Vergröfserung zu geben, kann aber die Kugel an einem elastischen Drahte befestigt werden, so dafs sie im stande ist, um eine Gleichgewichtslage Eigenschwingungen auszuführen. Dann reguliert man die Periode der Pulsationen oder Oscillationen, bis sie mit der Periode der Eigenschwingungen der Kugel übereinstimmt. Durch Resonanz kommt dann die Kugel in

starke Schwingungen, und giebt in vielfacher Vergröfserung die kleinen Oscillationen des Wassers wieder. Durch Verschiebung der Kugel von Stelle zu Stelle kann in dieser Weise die Richtung und, in relativem Mafse, auch die Gröfse der Wasserschwingungen erforscht werden.

**102. Graphische Aufnahme der Strombilder.** — Man kann auch sehr leicht dauernde Bilder der untersuchten Ströme erhalten. Die dabei zu benutzende Versuchsanordnung zeigt die Figur 49.

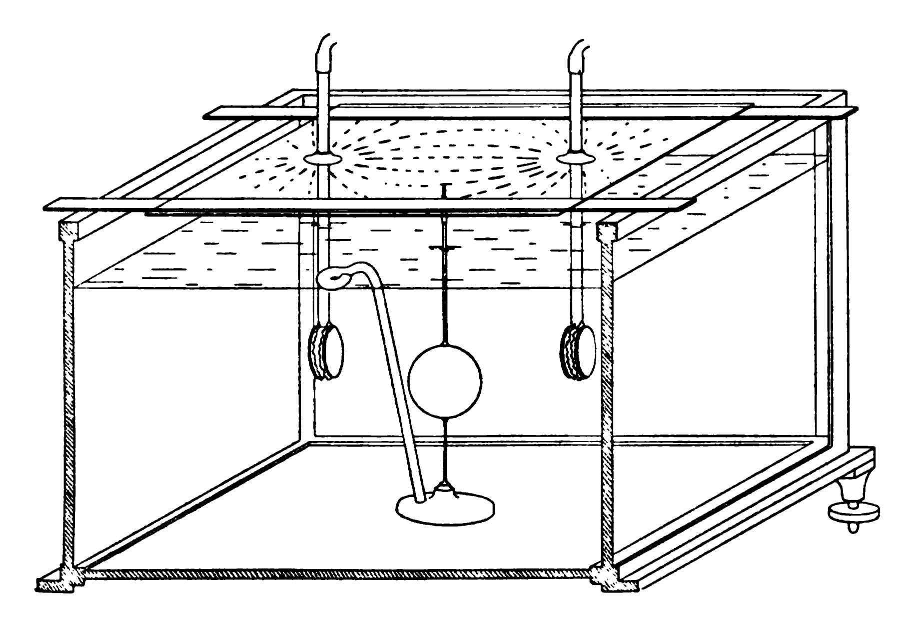


Fig. 49. Anordnung für die Aufnahme der Stromlinienbilder.

Der elastische Draht, welcher die Kugel trägt, ist seinerseits in einem schweren Fufse befestigt. Die Kugel trägt andererseits einen leichten vertikalen Stab, der über die Oberfläche des Wassers emporragt, und in einen kleinen Pinsel endigt. Diesen Pinsel feuchtet man mit Tinte oder mit einer leichtflüssigen Farbe an. Ein paar Millimeter oberhalb der Spitze des Pinsels befindet sich eine Glasplatte, welche auf zwei federnde, auf den Kanten des Aquariums ruhende Holzleisten gelegt ist. Ein wenig Klebwachs verhindert jedes Gleiten. Wenn die Kugel gute Schwingungen angenommen hat, drückt man die Glasplatte schwach herunter, und der Pinsel zeichnet einen Strich, welcher die Richtung und in relativem Mafse

zugleich die Gröfse der Schwingungen der Kugel anzeigt. Die Kugel mit dem Pinsel verschiebt man dann nach einer neuen Stelle, wo man wieder einen Strich erhält, und so weiter.

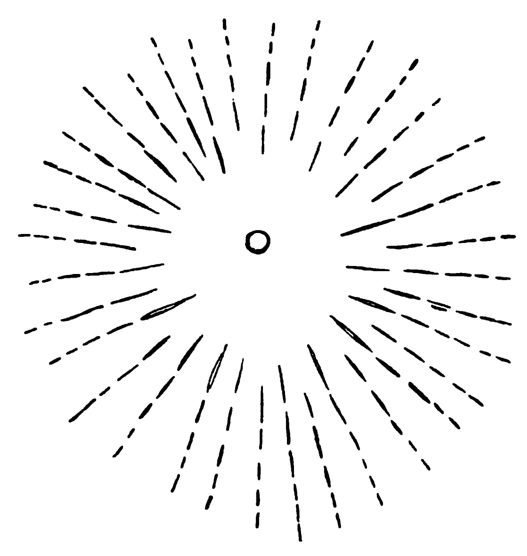


Fig. 50a. Stromlinienfeld eines pulsierenden Körpers (Mafsstab: $^1/_2$).

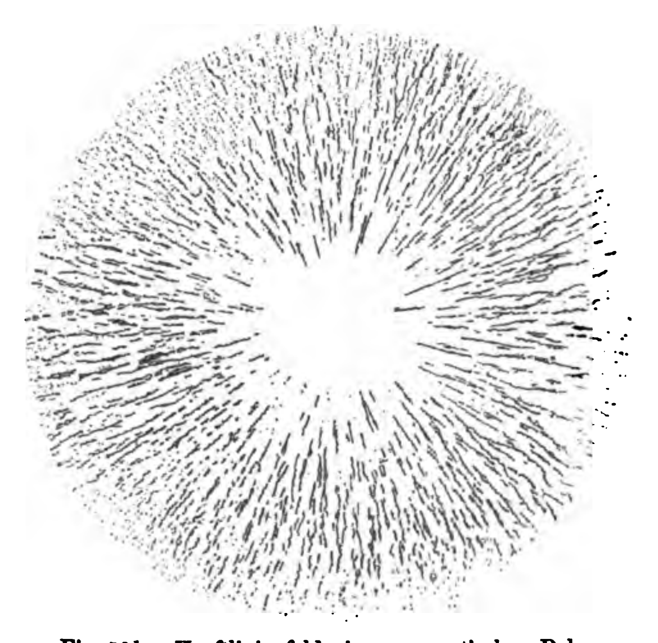


Fig. 50b. Kraftlinienfeld eines magnetischen Poles.

Nach dieser Methode stellte der Verfasser im Frühjahr 1881 die in den Figuren 50—54 wiedergegebenen Stromlinienbilder her.[1]

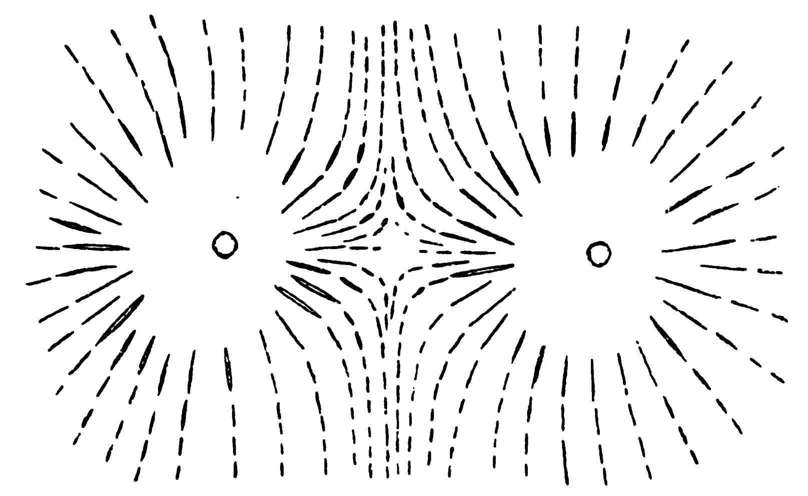


Fig. 51 a. Stromlinienfeld zweier gleich pulsierender Körper (Maßstab: $^1/_2$).

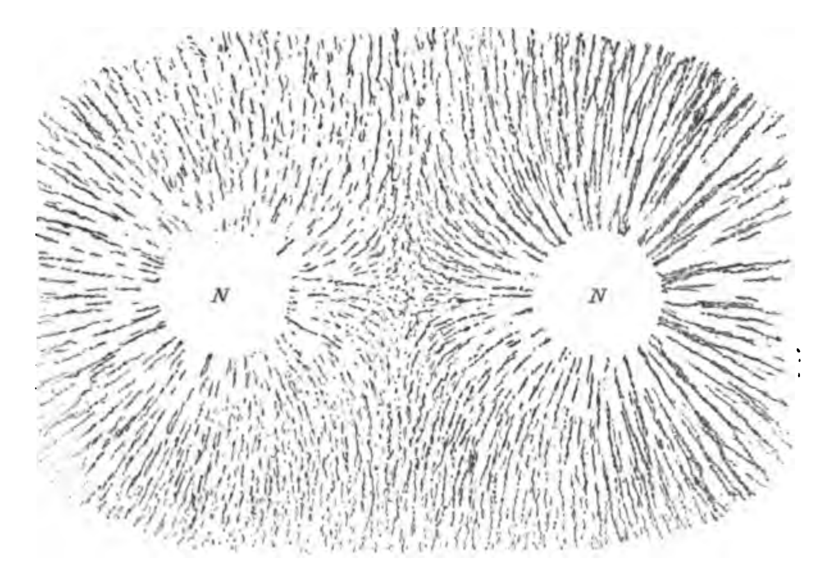



Fig. 51 b. Kraftlinienfeld zweier gleichnamiger Magnetpole.

Ein Generator von der Form wie Figur 15 wurde angewendet, und ein kleiner Wassermotor gab konstante Triebkraft. Die Pulsatoren

[1] V. Bjerknes, „Naturen", Christiania 1882.

hatten die gewöhnliche Trommelform. Zum Vergleiche sind auch die entsprechenden, durch den Versuch mit Eisenfeilspänen erhaltenen

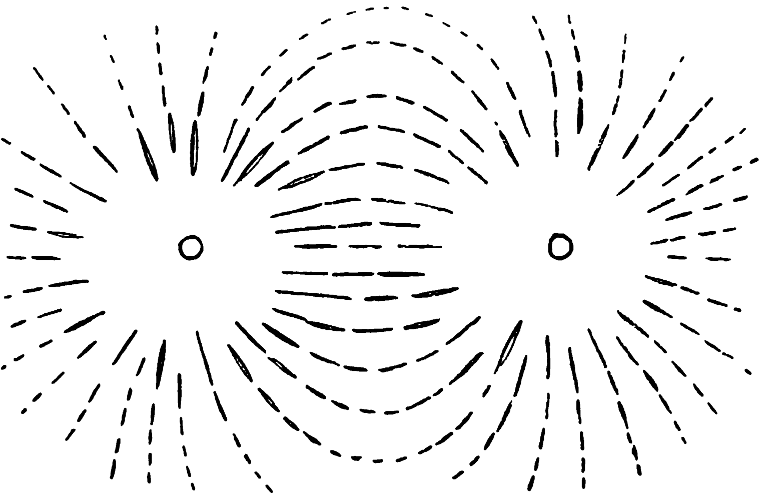


Fig. 52 a. Stromlinienfeld zweier entgegengesetzt pulsierender Körper (Mafsstab: $^1/_2$).

magnetischen Kraftlinienbilder wiedergegeben. Man vergleiche diese Figuren zugleich mit den durch die theoretische Konstruktion er-

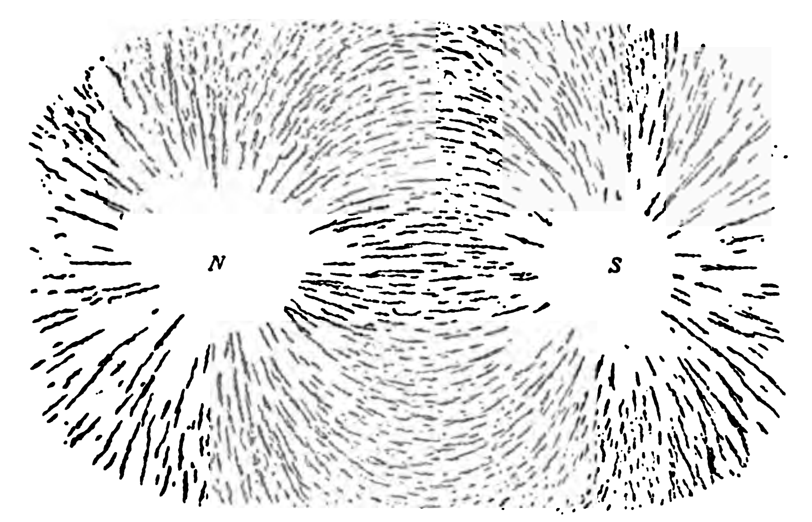



Fig. 52 b. Kraftlinienfeld zweier ungleichnamiger Magnetpole.

haltenen Stromlinienbilder, welche im ersten Bande in den Figuren 1, 2, 3 und 7 wiedergegeben sind.

Die Figur 50a zeigt die Stromlinien in der Umgebung einer pulsierenden Trommel. Sie nähern sich stark den radialen Strahlen,

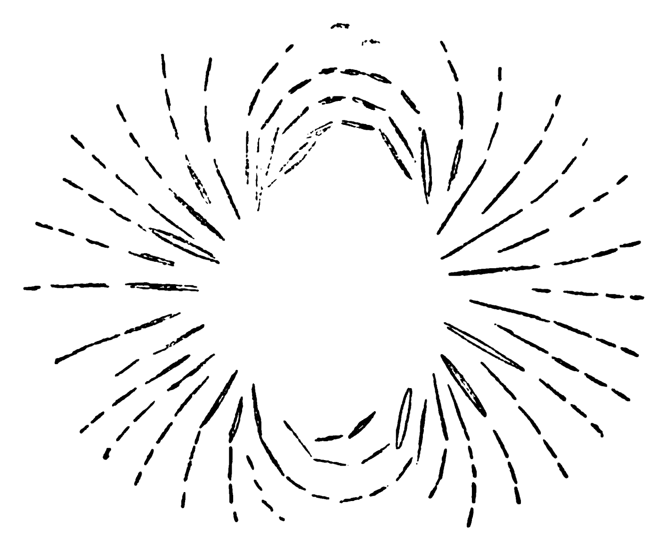


**Fig. 53a.** Stromlinienfeld einer oscillierenden Kugel (Oscillationsrichtung horizontal; Mafsstab: $^1/_2$).

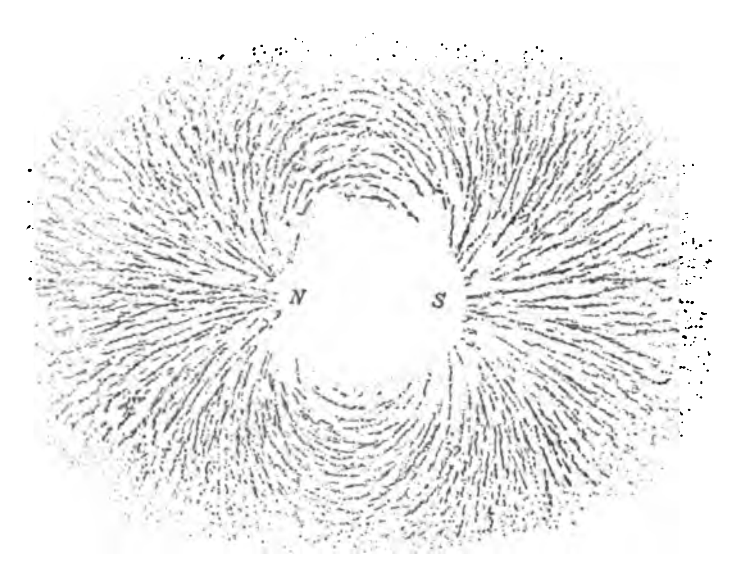



**Fig. 53b.** Kraftlinienfeld eines kurzen Magnets.

welche die Theorie in der Umgebung einer pulsierenden Kugel verlangt. Eine Abweichung von der radialen Richtung bemerkt man

nur bei den innersten Strichen, und diese Abweichung würde man selbstverständlich gröfser gefunden haben, wenn es möglich gewesen wäre, den Versuch in noch gröfserer Nähe der Trommel anzustellen. Dafs aber die Stromlinien schon in so kleiner Entfernung wesentlich radiale Strahlen sind, giebt die Erklärung, warum die für eine Kugel ausgearbeitete Theorie mit so grofser Genauigkeit für diese Trommeln verwendbar ist. Die Figur 50b giebt die ebenfalls radialen Kraftlinien, die man mit Eisenfeilspänen erhält, wenn nur der eine Pol eines langen Magnets auf die Eisenfeilspäne wirkt.

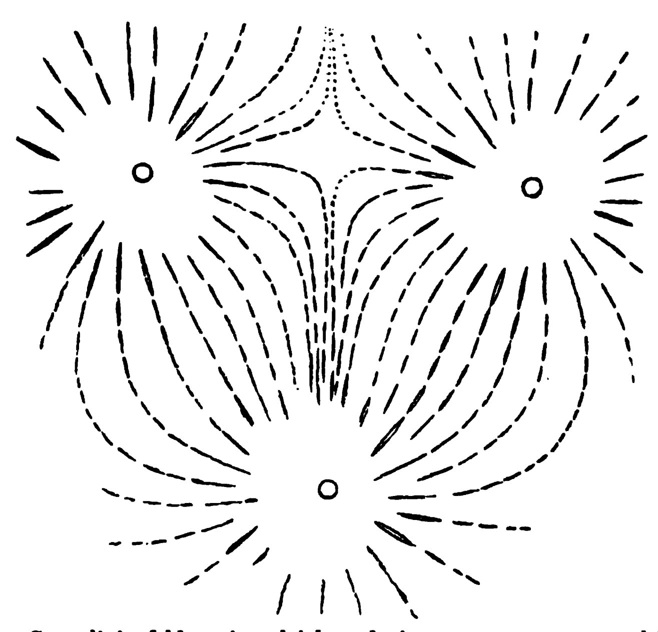


**Fig. 54a. Stromlinienfeld zweier gleich und eines entgegengesetzt pulsierenden Körpers (Mafsstab: $^1/_2$).**

Die Figur 51a zeigt in entsprechender Weise das Strombild, welches man in der Umgebung zweier gleich pulsierender Trommeln erhält, und die Figur 51b giebt die entsprechenden Kraftlinien zweier gleichnamiger Pole. In der Mitte der Figur sieht man die Neutralitätsstelle, wo die Energie des Feldes Null, und somit ein absolutes Minimum ist. Nach dieser Stelle werden im hydrodynamischen Falle leichte, im magnetischen Falle diamagnetische Körperchen sich hin bewegen, während schwere, beziehungsweise paramagnetische Körper von dieser Stelle weggetrieben werden, wie wir es gesehen haben (**94, 95**). Ein relatives Maximum hat dagegen

die Energie in der Ebene, welche durch den Neutralitätspunkt senkrecht zu der Verbindungslinie der Pole passiert, und zwar in einem Abstande von dem Neutralitätspunkte, welcher etwa ein Drittel des Polabstandes beträgt. Dieser Stelle mufs sich der schwere oder der ferromagnetische Körper nähern, vorausgesetzt, dafs er gezwungen ist, in dieser Ebene zu bleiben. Der leichte beziehungsweise der diamagnetische Körper kann aber nicht an dieser Stelle bleiben, sondern wird entweder nach dem Neutralitätspunkte wieder hingezogen oder ins Unendliche weggetrieben.

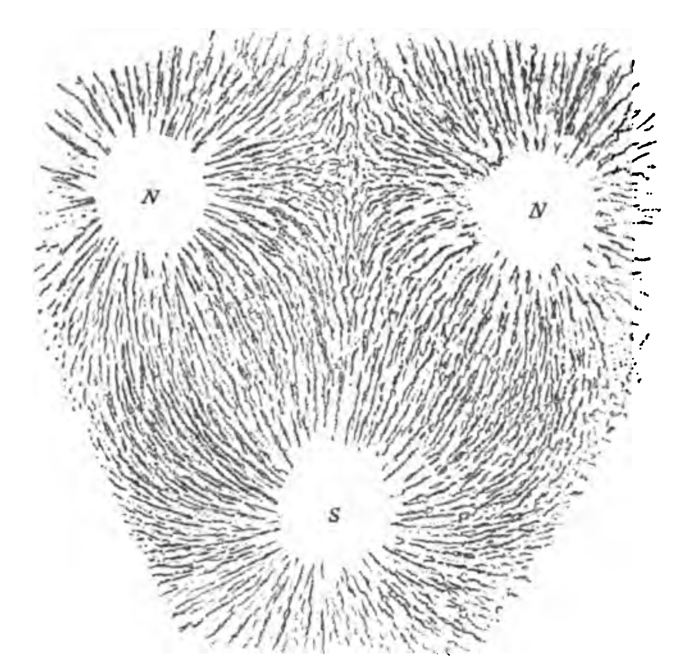



Fig. 54 b. Kraftlinienfeld zweier gleichnamiger und eines ungleichnamigen Magnetpoles.

Figur 52 a stellt die Stromlinien in der Umgebung zweier entgegengesetzt pulsierender Trommeln, und Figur 52 b die entsprechenden bekannten Kraftlinien zweier ungleichnamiger Magnetpole dar. In diesem Felde kommt kein Energieminimum aufser in der unendlichen Ferne vor. Die schweren beziehungsweise die ferromagnetischen Körper werden deshalb hier überall einfach angezogen, die leichten oder die diamagnetischen abgestofsen.

Figur 53 a stellt die Stromlinien im Felde einer oscillierenden Kugel, Figur 53 b die Kraftlinien eines kurzen Magnets dar. Wenn man von dem Gebiete zwischen den zwei pulsierenden Kugeln ab-

sieht, so haben die Stromlinien in den Figuren 52a und 53a denselben allgemeinen Verlauf, und man versteht die hierauf beruhende Äquivalenz zwischen einer oscillierenden Kugel und einem pulsierenden Kugelpaar.

Die Figuren 54a und b zeigen endlich das etwas kompliciertere Feld, das man durch zwei mit gleicher und einen mit entgegengesetzter Phase pulsierenden Körper erhält, und das Kraftfeld der entsprechenden Zusammenstellung von zwei gleichnamigen magnetischen Polen und einem mit diesen beiden ungleichnamigen magnetischen Pole.

Die Betrachtung dieser Strombilder und der Vergleich mit den früher gefundenen Resultaten über die ponderomotorischen Wirkungen zwischen pulsierenden Körpern sind wohl geeignet, die eigentümliche Natur der Analogie mit den magnetischen Erscheinungen deutlich hervortreten zu lassen: zwischen den Feldern gleich pulsierender Kugeln und gleichnamiger Pole besteht Identität, und ebenso zwischen den Feldern entgegengesetzt pulsierender Kugeln und ungleichnamiger Pole. Die Analogie ist also direkt in Betreff der geometrischen Eigenschaften der Felder. Die pulsierenden Körper der Figur 51 ziehen aber einander an, während die magnetischen Pole derselben Figur einander abstoſsen. Ebenso stoſsen die pulsierenden Kugeln der Figur 52 einander ab, während die magnetischen Pole derselben Figur einander anziehen, so daſs man bei gleichem Aussehen des Kraftfeldes immer entgegengesetzte Kraftwirkungen erhält.

# Dritter Teil.

## Die Analogie der hydrodynamischen Erscheinungen mit den elektrostatischen oder magnetischen.

## Erster Abschnitt.

### Die ersten Erfahrungen über elektrische oder magnetische Fernkräfte.

**103. Entgegengesetzter Entwickelungsgang der Lehre von den hydrodynamischen und von den elektrischen oder magnetischen Erscheinungen.** — Bei den vorhergehenden Untersuchungen, sowohl den experimentellen wie den theoretischen, haben wir oft auf Analogien der hydrodynamischen Erscheinungen mit elektrischen oder magnetischen hingewiesen. Das ist jedoch immer nur im Vorübergehen geschehen, wo es zur Veranschaulichung dienen konnte. Die Analogien an sich sind aber noch nicht der Gegenstand unserer Untersuchungen gewesen. Ihre Grenzen kennen wir nicht. Ja wir wissen nicht einmal, ob die Ähnlichkeiten, denen wir unter verschiedenen Verhältnissen begegnet sind, ohne Zusammenhang dastehen, oder ob sie Bruchstücke einer grofsen Analogie sind.

Wenn wir uns jetzt das Ziel setzen, die Analogie an sich zu untersuchen, so wird es nicht genügen, ohne weiteres die fertig vorliegenden hydrodynamischen Resultate mit den fertig vorliegenden elektrischen und magnetischen zu vergleichen. Denn wenn man sich der Verschiedenheit der Ausgangspunkte erinnert, und den daraus folgenden vollständig entgegengesetzten Entwickelungsgang der Lehre von Elektricität und Magnetismus einerseits, und unserer hydrodynamischen Theorien andererseits in Erwägung zieht, so ist von vornherein zu erwarten, dafs durch äufsere Zufälligkeiten formale Unterschiede auftreten müssen, selbst wenn die Analogie noch so

tief in der Natur der Dinge begründet wäre. Unsere hydrodynamischen Resultate haben wir nämlich teils durch strenge mathematische Deduktion gewonnen, ausgehend von der allgemein anerkannten Grundlage der Hydrodynamik, den EULER'schen Bewegungsgleichungen. Teils haben wir sie durch Versuche kennen gelernt, wo wir alles in unserer Hand hatten, so dafs wir die Erscheinungen immer in vollem Zusammenhange mit ihren Ursachen studieren konnten. Die Lehre von der Elektricität und dem Magnetismus entwickelte sich dagegen durch kühne Induktionen von einem äufserst speziellen Ausgangspunkte, den COULOMB'schen Gesetzen, zu der allgemeinen Theorie der elektrischen und magnetischen Felder. In dieser Weise ist eine Wissenschaft entstanden, welche sich weniger mit den direkt beobachteten oder beobachtbaren Erscheinungen beschäftigt, als mit solchen, welche wir hinter den beobachteten Erscheinungen ahnen.

Bei dieser Sachlage wird es nur einen Weg geben, der zu einer eingehenden Prüfung der Analogie führen kann: genau wie wir im vorhergehenden die deduktive Ableitung der hydrodynamischen Erscheinungen gegeben haben, müssen wir jetzt den induktiven Aufbau des Lehrgebäudes der elektrischen und magnetischen Erscheinungen wiedergeben, und Schritt für Schritt prüfen, inwieweit eine Analogie mit den hydrodynamischen Erscheinungen vorliegt oder nicht. Je nachdem Ähnlichkeiten oder Verschiedenheiten hervortreten, werden wir dann im stande sein, zu beurteilen, in welchem Mafse sie auf äufseren Zufälligkeiten beruhen, und in welchem Mafse sie in der Natur der Dinge begründet sind.

Wenn wir also im folgenden daran gehen, einen kurzen Abrifs der Theorie der elektrostatischen oder der magnetischen Erscheinungen zu geben, so werden wir oft Gelegenheit haben, die beim Aufbau der Theorie gemachten Induktionsschlüsse durch die hydrodynamische Analogie zu prüfen. Wir denken uns dann in die Lage eines Hydrodynamikers, welcher von den hydrodynamischen Erscheinungen ebensoviel weifs wie wir von den elektrischen und magnetischen. Wir lassen ihn genau denselben Induktionsschlufs machen, wie wir unter den gleichen Umständen in der Elektricitätslehre. Die hydrodynamischen Erscheinungen kennen wir aber andererseits vollständig, und wir können nachsehen, ob das Resultat, welches der Hydrodynamiker in dieser Weise gefunden hat, das richtige ist. Ist dies der Fall, so haben wir auf einmal zwei Resultate gewonnen. Denn der Analogiebeweis von der Richtigkeit des Induktionsschlusses giebt zugleich den Nachweis, dafs die

Analogie, welche Gegenstand unserer Untersuchungen ist, wirklich besteht.

Wir werden uns im folgenden nicht dabei aufhalten, wie elektrische oder magnetische Versuche wirklich ausgeführt werden. Alles kommt für uns nur auf den Kern der durch die Versuche gegebenen Erfahrungen an, und auf die Verkettung der Schlüsse, die zu der modernen Theorie der elektrostatischen und magnetischen Erscheinungen führen. Anstatt die konkreten Versuche der Experimentalphysiker zu beschreiben und zu Grunde zu legen, werden wir deshalb zur Abkürzung, wie man es oft in der mathematischen Physik macht, von idealisierten Versuchen ausgehen. Auch werden wir im folgenden die elektrostatischen und die magnetischen Erscheinungen nicht besonders scharf voneinander trennen. Denn wegen der formalen Analogie, welche diese Erscheinungsreihen unter sich haben, wird es meistens gleichgültig sein, ob wir die hydrodynamische Erscheinungsreihe mit der einen oder der anderen von diesen Reihen vergleichen. Je nachdem es bequem erscheint, werden wir bald den Sprachgebrauch der Elektrostatik, bald den des Magnetismus, und bald einen allgemeineren, welcher für beide paſst, benutzen.

**104. Elektrische, magnetische und hydrodynamische Fernkräfte.** — Die Grundlage unseres Wissens über die elektrischen Erscheinungen bildet die folgende Reihe von Erfahrungen. Geriebene Körper — oder allgemeiner Körper, welche irgend einen Elektrisierungsprozeſs durchgemacht haben — üben aufeinander gegenseitig Wirkungen in die Ferne aus. Weiter werden in ihre Nähe gebrachte Körper, welche selbst keinen solchen Prozeſs erlitten haben, auch von Fernkräften angegriffen, und üben Gegenwirkungen aus. Und zwar treten diese letzteren Fernwirkungen nicht nur zwischen einem primär elektrisierten und einem der ursprünglich neutralen, sondern auch zwischen je zwei der ursprünglich neutralen Körper auf.

Ganz ähnliche Erfahrungen bilden die Grundlage unserer Kenntnis der magnetischen Erscheinungen. Gewisse Körper, die permanenten Magnete, haben dauernd die Eigenschaft, aufeinander Fernwirkungen ausüben zu können. Sie üben auch solche Wirkungen auf in die Nähe gebrachte Eisenstücke aus, und erleiden von diesen die entsprechenden Gegenwirkungen. In die Nähe gebrachte Eisenstücke zeigen das Vermögen, auch aufeinander in die Ferne zu wirken, um dieses Vermögen in gröſserem Abstande von den permanenten Magneten wieder zu verlieren. Ähnlich wie das

Eisen verhalten sich in dieser Beziehung alle Körper, nur dafs die auftretenden Fernkräfte aufserordentlich viel schwächer sind.

Zum Vergleiche denken wir uns nun in die Lage eines Hydrodynamikers, welcher von den hydrodynamischen Erscheinungen eben nur soviel direkt beobachten kann, wie wir von den elektrischen und magnetischen. Er hat zu seiner Verfügung pulsierende, oscillierende und neutrale Körper, die sich in einer Flüssigkeit befinden. Die kleinen Schwingungen dieser Körper kann er nicht wahrnehmen und auch die Flüssigkeit nicht. Oder wenn er die letztere sieht, so soll ihm doch ihr Schwingungszustand wie der der Körper unbekannt sein. Er sieht dann, dafs gewisse Körper, die permanent pulsierenden oder oscillierenden, primär das Vermögen haben, Fernwirkungen aufeinander auszuüben. In ihre Nähe gebrachte, ursprünglich neutrale Körper werden auch von den permanent fernwirkenden Körpern Kräfte erleiden und die entsprechenden Gegenwirkungen ausüben. Sie zeigen ebenfalls das Vermögen, aufeinander Fernwirkungen auszuüben, um es in gröfserer Entfernung von den primär fernwirkenden Körpern wieder zu verlieren.

Wir heben gleich hervor, wie die Erfahrungen in allen drei Fällen zeigen, dafs die Körper in zweierlei verschiedener Weise das Vermögen besitzen können, Fernkräfte auszuüben oder zu erleiden. Entweder haben sie diese Eigenschaft primär erhalten, und besitzen sie mehr oder weniger dauernd als eine permanente Eigenschaft, oder sie gewinnen das Vermögen nur temporär, also solange sie sich in der Nachbarschaft der permanent fernwirkenden Körper befinden.

**105. Das Gegenwirkungsprinzip.** — Eine Eigenschaft der Fernkräfte aller drei Gattungen läfst sich ohne jede Beschränkung der Allgemeinheit nachweisen. Verbindet man sämtliche Körper starr miteinander, aber in solcher Weise, dafs das System als ein Ganzes in irgend welcher Weise beweglich bleibt, so tritt keine Bewegung ein.

Das System können wir uns nun in irgend welcher Weise in zwei Teile zerlegt denken. Der angegebene Versuch zeigt dann, dafs die Kraft, welche der erste Teil auf den zweiten ausübt, derjenigen Kraft gleich und entgegengesetzt ist, welche der zweite Teil auf den ersten ausübt. Mit anderen Worten:

*Für die elektrostatischen, die magnetischen und die hydrodynamischen Fernkräfte ist das Prinzip von der gleichen Wirkung und Gegenwirkung gültig.*

Es hat jedoch Interesse hervorzuheben, daſs dieses Gesetz im hydrodynamischen Falle eine Ausnahme hat, wenn es sich um die nach der Voraussetzung nicht beobachtbaren Wirkungen handelt, welche die Induktionskraft ausübt Daſs man auf ähnliches stoſsen kann, wenn man tiefer in die Dynamik der elektrischen und magnetischen Erscheinungen eindringt, ist eine Möglichkeit, mit welcher man rechnen muſs.

**106. Beschränkte Gültigkeit des Superpositionsprinzipes. Vorläufige Begrenzung der Aufgabe.** — Sehr komplicierte Gesetze findet man, wenn man die Gesamtkraft, welche eine Anzahl von gleichzeitig vorhandenen Körpern ausübt, mit den von jedem Körper ausgeübten Einzelkräften vergleicht. Es zeigt sich, daſs die Gesamtkraft im allgemeinen nicht die Vektorsumme der Einzelkräfte ist. Um den einfachsten Fall als Beispiel hervorzuheben: Man miſst die Kraft $F$, welche zwei Körper $A$ und $B$ auf einen dritten Körper $C$ ausüben, wenn alle gleichzeitig vorhanden sind. Man entfernt den Körper $B$ und miſst die Kraft $F_A$, die der Körper $A$, allein vorhanden, von seiner Lage aus auf den Körper $C$ ausübt. Schlieſslich entfernt man $A$, bringt wieder $B$ in seine Lage, und miſst die Kraft $F_B$, welche $B$, allein vorhanden, auf $C$ ausübt. Man findet dann, daſs die Gesamtkraft $F$ im allgemeinen nicht die Vektorsumme der zwei Kräfte $F_A$ und $F_B$ ist.

Wiederholt man aber den Versuch mit immer wachsenden Abständen zwischen den Körpern, so zeigt es sich, daſs sich die Gesamtkraft $F$ immer mehr der Vektorsumme der zwei Einzelkräfte $F_A$ und $F_B$ nähert. Zuletzt, wenn die Abstände hinlänglich groſs im Vergleich zu den Dimensionen der Körper geworden sind, findet man innerhalb der Genauigkeitsgrenze der Versuche keinen Unterschied mehr zwischen der Gesamtkraft und der Vektorsumme der Einzelkräfte. Wir stellen also als ein Resultat gröſster Wichtigkeit folgenden Satz auf:

*Wenn die Dimensionen der elektrisch, magnetisch oder hydrodynamisch fernwirkenden Körper hinlänglich klein sind im Vergleich zu ihren gegenseitigen Abständen, so superponieren sich die Fernkräfte, ohne einander zu stören.*

Dieses Resultat werden wir benutzen, indem wir uns zunächst auf die Entwickelung der Theorie unter solchen Umständen beschränken, wo die Fernkräfte sich ungestört superponieren.

In diesem Zusammenhange ist noch die wichtige Bemerkung

zu machen, dafs die Vereinfachung in den Eigenschaften der Kräfte, die wir somit ausnutzen, mit einer anderen parallel verläuft. Denn wenn sich die Kräfte ungestört superponieren, so sind auch keine Kräfte mehr merkbar zwischen anderen Körpern als solchen, welche permanent das Fernwirkungsvermögen besitzen. Die übereingekommene Beschränkung unserer Aufgabe besteht deshalb, können wir auch sagen, darin, dafs wir vorläufig nur die Kräfte permanenter Natur betrachten.

**107. Relatives Mafs des Fernwirkungsvermögens.** — Wir denken uns jetzt, dafs wir eine Anzahl primär fernwirkender Körperchen 0, 1, 2, 3, ... zur Verfügung haben. Sie können im hydrodynamischen Falle pulsierende Kugeln, im elektrischen geriebene Isolatoren, im magnetischen magnetische Pole sein. Dabei ist zu bemerken, dafs in der Wirklichkeit magnetische Pole nicht für sich bestehen können. Um Umschreibungen zu vermeiden, denken wir sie uns aber als wirklich bestehend. Zur Abkürzung werden wir diese fernwirkenden Körper sowohl im elektrischen und magnetischen, wie im hydrodynamischen Falle zusammenfassend als Pole bezeichnen.

Die Wirkungen, welche die Pole aufeinander ausüben, betrachten wir nur in solchen Abständen, in welchen sich das Superpositionsprinzip innerhalb der Genauigkeitsgrenze der Versuche gültig zeigt. Wenn wir diese Beschränkung streng festhalten, so können wir sogleich unsere Untersuchungen dadurch vereinfachen, dafs wir immer nur die Wirkung von je zwei Körpern aufeinander untersuchen. Alle Resultate, die sich auf mehrere Körper beziehen, ergeben sich dann durch einfache Superposition.

Von den gegebenen Körpern greifen wir nacheinander irgend zwei heraus, und untersuchen die Kräfte, die sie unter sonst gleichen Umständen, das heifst aus gleicher Entfernung und in einem und demselben (im elektrischen Falle isolierenden) Medium aufeinander ausüben. Verschiedene Körperpaare geben dann Kräfte weit verschiedener Intensität. Diese Intensitäten stehen in offenbarer Verbindung mit der Intensität der Elektrisierungs- oder Magnetisierungsprozesse, durch welche die Körper ihr Fernwirkungsvermögen gewonnen haben. Doch geben diese Prozesse keine Erläuterung darüber, worin der elektrische oder magnetische Zustand besteht, und können auch nicht als Grundlage einer rationellen Messung der Intensitäten dieser Zustände dienen. Man ist deshalb darauf angewiesen, sich der beobachteten Fernkräfte selbst zu bedienen, um diese Intensitäten messend zu untersuchen.

Um dies zu bewerkstelligen, können wir erst die Kräfte messen, welche nacheinander die Körper 0, 1, 2, ... aus gleicher Entfernung und in demselben Medium auf einen mit dem Index $k$ bezeichneten Körper ausüben. Die durch diese Versuche gefundenen Kräfte bezeichnen wir mit $F_{0k}, F_{1k}, F_{2k}, F_{3k}, \ldots$ Bilden wir die Verhältnisse der Kräfte $F_{1k}, F_{2k}, \ldots$ zu der ersten $F_{0k}$, so ergiebt sich:

$$\text{(a)} \qquad \frac{F_{1k}}{F_{0k}} = n_1, \qquad \frac{F_{2k}}{F_{0k}} = n_2, \qquad \frac{F_{3k}}{F_{0k}} = n_3, \ldots$$

Eine beliebige dieser Verhältniszahlen, beispielsweise $n_2$, ist positiv, wenn die Kraft $F_{2k}$ dasselbe Vorzeichen hat, wie die Vergleichskraft $F_{0k}$, und im entgegengesetzten Falle negativ.

Dieser Versuch kann nun in verschiedenartiger Weise wiederholt werden. Wir können ihn mit denselben Körpern, aber in einem anderen Abstande ausführen. Dabei ergeben sich andere Werte $F'_{0k}, F'_{1k}, F'_{2k}, F'_{3k}, \ldots$ der Kräfte. Bildet man aber in derselben Weise wie oben die Verhältniszahlen, so ergeben sich dieselben Resultate:

$$\text{(b)} \qquad \frac{F'_{1k}}{F'_{0k}} = n_1, \qquad \frac{F'_{2k}}{F'_{0k}} = n_2, \qquad \frac{F'_{3k}}{F'_{0k}} = n_3, \ldots$$

Weiter können wir die Körper aus dem Medium, wo diese Versuche ausgeführt sind, in ein beliebiges anderes, gasförmiges oder flüssiges bringen. Im elektrischen Falle ist dabei die Reservation hinzuzufügen, dafs das Medium isolierend sein mufs. Es ergeben sich dann wieder neue Werte $F''_{0k}, F''_{1k}, F''_{2k}, F''_{3k}, \ldots$ der Kräfte. Die Verhältniszahlen

$$\text{(c)} \qquad \frac{F''_{1k}}{F''_{0k}} = n_1, \qquad \frac{F''_{2k}}{F''_{0k}} = n_2, \qquad \frac{F''_{3k}}{F''_{0k}} = n_3, \ldots$$

zeigen sich aber fortwährend unverändert.

Schliefslich können wir den Körper $k$ durch einen beliebigen anderen Körper $l$ ersetzen. Dabei ergeben sich noch einmal neue Werte $F_{0l}, F_{1l}, F_{2l}, F_{3l}, \ldots$ der Kräfte. Die Verhältniszahlen

$$\text{(d)} \qquad \frac{F_{1l}}{F_{0l}} = n_1, \qquad \frac{F_{2l}}{F_{0l}} = n_2, \qquad \frac{F_{3l}}{F_{0l}} = n_3, \ldots$$

bleiben aber dieselben.

Die somit unter den verschiedensten Verhältnissen konstant gefundenen Zahlen $n_1, n_2, n_3, \ldots$ geben das Vermögen an, welches

die Körper 1, 2, 3, ... haben, scheinbare Kräfte auszuüben, bezogen auf das Vermögen, welches in dieser Hinsicht unter den gleichen Umständen der erste Körper 0 hat. Da das Prinzip von der gleichen Wirkung und Gegenwirkung gültig ist, können wir auch sagen, dafs diese Zahlen das Vermögen der untersuchten Körper, Fernkräfte zu erleiden, angeben, wieder bezogen auf das Vermögen, welches in gleicher Hinsicht der Vergleichskörper 0 hat.

**108. Polintensität.** — Weiter als zu diesen Verhältniszahlen führen die konkreten Messungen nicht. In Gedanken können wir aber einen Schritt weiter gehen, indem wir eine Deutung der nachgewiesenen Invarianz dieser Verhältniszahlen geben. Die nächstliegende Deutung ist, dafs die Invarianz irgend eines Zustandes oder Vorganges zu Grunde liegen mufs, welcher den fernwirkenden Körpern eigen ist, und auf welchem ihr Fernwirkungsvermögen beruht.

Die Natur dieses Zustandes oder Vorganges ist uns gänzlich unbekannt. Sobald wir uns aber für diese Deutung entschlossen haben, können wir dennoch einen Parameter einführen, den wir als ein Mafs für die Intensität dieses Zustandes oder Vorganges betrachten. Dabei machen wir in der That nichts anderes als der Mathematiker, wenn er für eine gesuchte unbekannte Gröfse ein Symbol einführt, und mit diesem Symbol wie mit einer bekannten Gröfse rechnet. Wir betreten dadurch wie der Mathematiker nur den bequemsten Weg für die Bestimmung der Unbekannten, selbst wenn schliefslich diese Bestimmung eine Aufgabe der Zukunft bleibt.

Als mathematisches Symbol für diesen Parameter führen wir $\hat{E}$ ein, und bezeichnen diesen Parameter im elektrischen, im magnetischen und im hydrodynamischen Falle gemeinschaftlich als die Polintensität des fernwirkenden Körpers. Daneben können wir im magnetischen Falle die Bezeichnung magnetische Masse, im elektrischen elektrische Masse oder Ladung benutzen. Der Zusammenhang dieses Parameters mit den ausgeführten relativen Messungen wird durch die Relationen

$$\text{(a)} \qquad \hat{E}_1 = n_1 \hat{E}_0, \quad \hat{E}_2 = n_2 \hat{E}_0, \quad \hat{E}_3 = n_3 \hat{E}_0, \ldots$$

gegeben, wo $\hat{E}_0$ die Polintensität des gewählten Vergleichskörpers ist.

Schon hier, indem wir anstatt der gemeinen Verhältniszahlen $n$ den Parameter $\hat{E}$ einführen, betreten wir den Weg der Induktionsschlüsse. Die Zahlen $n$ haben wir als die Verhältnisse von

Kräften $F$ gefunden. In (a) treten sie dagegen als die Verhältniszahlen ganz anderer Gröſsen $\acute{E}$ auf, die wir durch eine Deutung der Erscheinungen einführen. Hierin liegt etwas induktives. Denn es ist nicht erwiesen und läſst sich nicht erweisen, daſs diese Deutung die einzig mögliche ist, wie abhängig wir auch aus subjektiven Gründen von Deutungen dieser Natur sind, da wir mit den leeren Formen nicht arbeiten können, sondern ihnen immer einen, wenn auch noch so unbestimmten positiven Inhalt geben müssen.

Greifen wir aber auf das hydrodynamische Bild der elektrischen oder magnetischen Erscheinungen zurück, so erhalten wir gleich durch Analogie eine Bestätigung, daſs wir einen richtigen Weg eingeschlagen haben. Ein Hydrodynamiker, welcher nicht mehr von den hydrodynamischen Erscheinungen weiſs, als wir von den elektrischen oder magnetischen, und welcher, den Spuren des Elektrikers folgend, aus der Konstanz der Verhältniszahlen $n$ auf die Konstanz irgend eines Zustandes oder Vorganges bei den einzelnen fernwirkenden Körpern schlieſst, macht einen richtigen Schluſs. Denn hinter den Fernwirkungen steht bei jedem Körper ein konstanter Bewegungszustand oder Bewegungsvorgang, das Pulsieren. Und mit der Einführung des Parameters $\acute{E}$, den er mit vollständiger Kenntnis der Erscheinungen die Pulsationsintensität des betreffenden Körpers nennen wird, macht er einen Schritt, durch welchen seine Beschreibung der Erscheinungen jedenfalls in formaler Beziehung absolut richtig und vollständig werden kann.

**109. Relatives Maſs des Eingreifens verschiedener Medien.** — Wenn uns die Aufgabe vorliegt, eine neue Naturerscheinung zu beschreiben, so haben wir immer in erster Reihe nach demjenigen zu suchen, welches sich unter den wechselnden Verhältnissen gleich bleibt. Die in der Weise gefundenen Konstanten werden dann fundamentale Parameter, welche für die Beschreibung der Erscheinung ausgenutzt werden können. Eine solche Reihe von fundamentalen Parametern haben wir jetzt in den den einzelnen Körpern eigenen Parametern $\acute{E}$ gefunden. Eine zweite Reihe können wir uns verschaffen, wenn wir diejenigen Kräfte untereinander vergleichen, welche dieselben zwei Körper unter sonst gleichen Umständen aufeinander ausüben, wenn sie in eine Reihe von verschiedenen Medien eingebracht werden.

Es seien $F_0, F_1, F_2, F_3, \ldots$ die Kräfte, welche die Körper aus gleicher Entfernung in den Medien $0, 1, 2, 3, \ldots$ aufeinander ausüben. Bilden wir dann die Verhältniszahlen

$$h_1 = \frac{F_1}{F_0}, \qquad h_2 = \frac{F_2}{F_0}, \qquad h_3 = \frac{F_3}{F_0}, \ldots$$

so bleiben sich diese immer gleich, welche zwei fernwirkenden Körper wir auch für den Versuch gewählt haben und welches auch der gewählte konstante Abstand zwischen denselben ist. Die Zahlen $h_1, h_2, h_3, \ldots$ vertreten also Eigenschaften der Medien, nicht der Körper. Sie geben ein Mafs des Einflusses der verschiedenen Medien auf die Fernwirkungserscheinung an, bezogen auf den Einflufs, den in gleicher Hinsicht das erste Medium 0 hat. Dieses Medium 0 spielt hier eine genau ähnliche Rolle wie der Körper 0 bei der Festsetzung der Verhältniszahlen $n_1, n_2, n_3, \ldots$ Die Wahl des Normalkörpers wie des Normalmediums geschieht rein willkürlich, und trifft man eine andere Wahl, so bekommt man eine andere Reihe von Verhältniszahlen der einen oder der anderen Gattung.

Wenn wir bei den angegebenen Versuchen von einem Medium reden, so ist damit im hydrodynamischen Falle selbstverständlich immer ein flüssiges oder gasförmiges zu verstehen. Auch im elektrischen und magnetischen Falle können die angegebenen Versuche nur in flüssigen oder gasförmigen Medien direkt zur Ausführung kommen. Indirekte Methoden, bei welchen wir uns nicht aufzuhalten brauchen, führen aber zu der Definition und der Messung dieser Verhältniszahlen $h$ auch für feste Körper.

Schliefslich macht man im elektrischen und magnetischen Falle auch die wichtige Wahrnehmung, dafs sich der luftleere Raum in keiner Beziehung von einem gewöhnlichen mit wägbarer Materie gefüllten Raume unterscheidet. Wir ziehen die vollen Konsequenzen dieser Thatsache, indem wir im folgenden auch den luftleeren Raum als ein materielles Medium auffassen und bezeichnen.

**110. Ponderomotorische Aktivitätskonstante.** — Die Entdeckung dieser neuen, für die verschiedenen Medien charakteristischen Verhältniszahlen $h$ führt zu genau ähnlichen Überlegungen, wie die Entdeckung der für die verschiedenen Körper konstanten Verhältniszahlen. Die einfachste Deutung der Versuche ist die, dafs die Medien durch irgend eine physikalische Eigenschaft in die Fernwirkungserscheinung eingreifen. Was für eine Eigenschaft das ist, darüber kann kein Schlufs auf Grundlage der Messung der Verhältniszahlen gezogen werden. Aber dennoch ist es statthaft, einen Parameter einzuführen, welchen wir als Mafs dieser unbekannten Eigenschaft betrachten, und den wir etwa die ponderomotorische

Aktivitätskonstante des betreffenden Mediums für elektrische, magnetische beziehungsweise hydrodynamische Fernkräfte nennen. Und weiter, obgleich wir nicht die absoluten Werte dieses Parameters kennen, können wir ihn doch mit einem mathematischen Symbol bezeichnen, welches wir in den für die Beschreibung der Erscheinungen bestimmten Formeln einführen.

Das Rückgreifen auf das hydrodynamische Bild ist hier wieder lehrreich, denn die angegebene Deutung ist im hydrodynamischen Falle richtig. Wie die deduktive Ableitung dieser Erscheinungen gezeigt hat, greift die Flüssigkeit durch ihre Dichte in die Fernwirkung zwischen den pulsierenden Körpern ein. Daſs aber die ponderomotorische Aktivitätskonstante des Mediums für hydrodynamische Fernkräfte eben die Dichte ist, wird ein Hydrodynamiker mit demselben beschränktem Wissen wie ein Elektriker auf Grund der beschriebenen Versuche nicht schlieſsen können. Dazu wären noch weitere Versuche, wie etwa Wägungen der Flüssigkeiten, notwendig. Wenn er aber, trotz dieser Unbekanntschaft, den Parameter einführt, und denselben durch ein mathematisches Symbol bezeichnet, welches er in den für die Beschreibung der hydrodynamischen Erscheinungen bestimmten Formeln anwendet, so macht er dadurch einen Schritt, welcher wenigstens in formaler Beziehung das Bild der hydrodynamischen Erscheinungen, welches er sich auszubilden sucht, dem wahren Bild näherbringt.

Die ponderomotorische Aktivitätskonstante eines Mediums für elektrische, magnetische oder hydrodynamische Fernkräfte bezeichnen wir mit $q$, demselben Symbol, welches wir in den hydrodynamischen Entwicklungen für die Dichte der Flüssigkeit benutzt haben. Für die verschiedenen Medien 0, 1, 2, 3 hat dieser Parameter die bestimmten Werte $q_0, q_1, q_2, q_3, \ldots$, und der Zusammenhang dieser Werte mit unseren relativen Messungen wird durch die Relationen

$$\text{(a)} \qquad q_1 = h_1 q_0, \quad q_2 = h_2 q_0, \quad q_3 = h_3 q_0, \ldots$$

gegeben.

**111. Das Fernwirkungsgesetz für zwei Körperchen.** — Die Gröſsen $q$ und $\dot{E}$ stellen die Konstanten dar, die wir zur Verfügung haben für die Beschreibung der zu untersuchenden Fernwirkungserscheinungen. Die übrigen eingreifenden Gröſsen, welche auf die Werte der Fernkräfte Einfluſs haben, sind stetig veränderliche Gröſsen geometrischer Natur und durch die Konfiguration des Systems bestimmt.

Wenn es sich nun um zwei Körperchen handelt, so läſst sich die Konfiguration durch einen einzigen Parameter, nämlich ihren Abstand, angeben. Denn solange die Körper, wie wir voraussetzen, hinlänglich klein im Verhältnis zu ihren gegenseitigen Abständen sind, zeigt sich, daſs die Kraft eine längs der Verbindungslinie gerichtete Centralkraft ist, deren Richtung oder Gröſse sich nicht mit der Orientierung, sondern nur mit dem Abstand der Körperchen verändert. Und zwar geben die Messungen das einfache Resultat, daſs sich die Intensität der Kraft dem Quadrate des Abstandes umgekehrt proportional verändert.

Wir stellen jetzt alles, was wir über die Kraft wissen, zusammen: Sie ist der Konstante $q$ des Mediums proportional, in dem sich die Körper befinden; sie ist der Konstante $\acute{E}_g$ des einen, und der Konstante $\acute{E}_k$ des anderen fernwirkenden Körpers proportional; sie ist schlieſslich dem Quadrate der Entfernung $r$ umgekehrt proportional. Stellt also $F$ die in der benutzten Kräfteeinheit ausgedrückte Kraft dar, so läſst sich die Formel aufschreiben:

$$\text{(a)} \qquad F = \pm\, c\, q \frac{\acute{E}_k \acute{E}_g}{r^2}.$$

$c$ ist ein Proportionalitätsfaktor, dessen Wert von den benutzten Einheiten abhängt.

Wir haben die Formel mit doppeltem Vorzeichen geschrieben. Denn da alle in ihr vorkommenden Buchstaben neben der elektrischen oder der magnetischen zugleich eine hydrodynamische Bedeutung haben, so erreichen wir durch Einführung des doppelten Vorzeichens, daſs die Formel je nach Belieben elektrisch, magnetisch oder hydrodynamisch interpretiert werden kann. Das obere Vorzeichen bezieht sich hier und im folgenden durchgehend auf den elektrischen oder magnetischen, das untere auf den hydrodynamischen Fall.

**112. Die Festsetzung der Einheiten.** — Wenn wir in der obigen Formel die Parameter $q$, $\acute{E}_g$ und $\acute{E}_k$ nach **108**(a) und **110**(a) durch die Konstante $q_0$ des gewählten Normalmediums, die Konstante $\acute{E}_0$ des angewendeten Normalkörpers und die meſsbaren Verhältniszahlen $h$ und $n$ ersetzen, so ergiebt sich

$$F = \pm\, c\, h\, q_0 \frac{n_g n_k \acute{E}_0^2}{r^2}.$$

Diese Gleichung zeigt, daſs wir auch jetzt, nach der vollständigeren Formulierung des Wechselwirkungsgesetzes, nicht im stande sind, die absoluten Werte der Gröſsen $q_0$ und $\acute{E}_0$ abzuleiten, die uns bei den einleitenden Messungen als Einheiten dienten. Denn das Wechselwirkungsgesetz giebt nur eine Gleichung, während es die zwei unbekannten Gröſsen $q_0$ und $\acute{E}_0$ enthält. Von absoluten Messungen im strengen Sinne des Wortes wird deshalb nicht die Rede sein können. Alles was wir nach der vollständigeren Formulierung des Wechselwirkungsgesetzes im Interesse der Messungen thun können, reduciert sich darauf, daſs wir die früher für die Ausführung der einleitenden Messungen benutzten Einheiten durch neue ersetzen können, welche man unter allen Umständen wiederfinden kann.

In dieser Hinsicht ist für die ponderomotorische Aktivitätskonstante nichts weiteres zu erreichen. Weiter als zu der Wahl der Aktivitätskonstante eines bestimmten Mediums als Einheit können wir vorläufig nicht kommen. In der Praxis wählt man immer als solches Normalmedium den leeren Raum. Da wir uns aber nicht mit konkreten Messungen beschäftigen, hat diese letzte Spezialisierung für uns nichts zu bedeuten. Es genügt, daran festzuhalten, daſs ein beliebiges Medium gewählt werden kann, ohne daſs wir uns für ein bestimmtes entscheiden.

Anders verhält es sich mit der Einheit $\acute{E}_0$ der Polintensität. Denn die Ladung eines elektrisierten Körpers oder die Magnetisierung eines Stahlmagnets besitzen nicht den Grad von Permanenz, daſs sie als Etalon aufbewahrt werden könnte. Die Festsetzung dieser Einheit können wir deshalb mit Vorteil von dem Fernwirkungsgesetze abhängig machen. Das heiſst, die Polintensität, welche ein fernwirkender Körper haben muſs, um unter gewissen genau übereingekommenen Verhältnissen eine übereingekommene Kraft auszuüben oder zu erleiden, werden wir als Einheit der Polintensität wählen.

Die Übereinkünfte können in verschiedenartiger Weise gewählt werden, und in einem bestimmten Punkte liegen auch verschiedene Vorschläge vor. Übereinstimmend ist immer verlangt worden, daſs der Körper, dessen Polintensität man als Einheit anwenden will, eine Kraft gleich der Kräfteeinheit auf einen Körper gleicher Polintensität ausüben soll; übereinstimmend verlangt man weiter, daſs sich dabei beide Körper in dem Medium befinden sollen, dessen ponderomotorische Aktivitätskonstante gleich Eins gewählt ist, also im leeren Raume nach der praktischen Übereinkunft. Über die Fest-

setzung der geometrischen Verhältnisse liegen dagegen zwei verschiedene Vorschläge vor.

Der eine ist von der Fernwirkungslehre ererbt, und nach dem grofsen Umschlag in der Auffassung der elektrischen und magnetischen Erscheinungen doch vorläufig beibehalten worden. Nach der alten Auffassung ist die Kraft eine Abstandskraft, und der Abstand folglich der fundamentale geometrische Parameter, dessen Wert es nahe liegt gleich Eins zu setzen. Die vollständige Definition der Polintensität wird dann die folgende:

(I) *Ein Körper hat die Polintensität Eins, wenn er im Normalmedium auf einen Körper mit der gleichen Polintensität die Kraft Eins ausübt, sofern der Abstand beider Körper gleich Eins ist.*

Setzen wir in Übereinstimmung mit dieser Definition in der Formel 111 (a) $F = 1$, $q = 1$, $\dot{E}_g = \dot{E}_k = 1$, $r = 1$, so ergiebt sich

$$c = 1.$$

Die in diesem traditionellen oder nach Oliver Heaviside's Bezeichnung „irrationellen" Einheitssysteme ausgedrückten Polintensitäten werden wir durch $\dot{E}^i$ bezeichnen und das Wechselwirkungsgesetz nimmt bei der Anwendung dieser Einheiten die Form

$$\text{(a)} \qquad F = \pm\, q \frac{\dot{E}_k^i \dot{E}_g^i}{r^2}$$

an.

Für eine andere Übereinkunft ist Oliver Heaviside eingetreten. Im Anschlufs an die moderne Auffassung der elektrischen und magnetischen Kräfte, nicht als Abstandskräfte, sondern als Ausbreitungskräfte, fafst er als das für die Wechselwirkung der Körperchen fundamentale geometrische Element nicht den Abstand, sondern eine Kugelfläche auf, deren Radius gleich diesem Abstande ist. Denn über diese Kugelfläche hat sich die von dem einen Körper ausgehende Wirkung verbreitet, ehe sie sich am anderen geltend macht. Nach ihm definieren wir deshalb die Einheit der Polintensität folgendermafsen:

(II) *Ein Körper hat die Polintensität Eins, wenn er im Normalmedium auf einen Körper gleicher Polintensität die Kraft Eins ausübt, sofern der Abstand ein solcher ist, dafs eine Kugel mit diesem Abstande als Radius die Oberfläche Eins hat.*

Führen wir dieser Definition entsprechend in **111** (a) $F = 1$, $q = 1$, $\hat{E}_g = \hat{E}_k = 1$ und $4\pi r^2 = 1$, das heifst $r = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$ ein, so finden wir

$$c = \frac{1}{4\pi}.$$

Die in diesem, nach Heaviside's Bezeichnung „rationellen" Einheitssysteme gemessenen Gröfsen werden wir mit $\hat{E}$ ohne Indices bezeichnen, und das Wechselwirkungsgesetz nimmt bei der Benutzung dieses Einheitssystems die Form

$$F = \pm q \frac{\hat{E}_k \hat{E}_g}{4\pi r^2} \tag{b}$$

an.

Wir heben noch hervor, dafs wir in (I) und (II) nichts darüber gesagt haben, welches Medium wir als das Normalmedium wählen; und wir können diese Frage auch offen lassen, da wir uns nicht mit konkreten Messungen zu beschäftigen haben. Für die Bevorzugung eines Mediums vor einem anderen liegt nämlich bei dem jetzigen Stand unserer Kenntnisse kein innerer Grund vor, wieviel auch aus äufseren praktischen Gründen die Wahl des leeren Raumes als Normalmedium für sich hat.

**113. Die Einheitswahl vom Standpunkte der hydrodynamischen Analogie aus.** — Die Vorteile oder Nachteile, welche aus dem einen oder dem anderen Prinzip für die Festsetzung der Einheiten folgen, lassen sich erst überblicken, nachdem man die ganze Elektricitätslehre entwickelt hat. Wir werden deshalb hier nicht auf eine allgemeine Diskussion eingehen. Dagegen können wir gleich nachsehen, wie die Sache im hydrodynamischen Bilde der elektrischen Erscheinungen aussieht.

Ein Vergleich der Formeln **112** (a) und (b) mit der Formel **17** (a) zeigt dann folgendes: Ein Hydrodynamiker, welcher keinen anderen Eingang zu dem Studium der hydrodynamischen Wissenschaft, als die Beobachtung der Fernkräfte hat, trifft dann, und nur dann eine zweckmäfsige Wahl, wenn er mit Heaviside $c = \frac{1}{4\pi}$ setzt. Denn dadurch bringt er sofort das Wechselwirkungsgesetz in die Form, zu der wir auf rationellem Wege, mit voller Kenntnis des Zusammenhanges, geführt worden sind.

Dieses ist dafür entscheidend, wie wir uns zu dieser Wahl zu stellen haben. Denn behalten wir $c = 1$ bei, so führen wir will-

kürlich eine äuſsere Verschiedenheit zwischen den elektrischen und den hydrodynamischen Formeln ein. Wenn wir dann später solche Formeln vergleichen, so werden wir jedesmal gezwungen, durch eine besondere Diskussion zu entscheiden, ob die Verschiedenheiten immer nur noch von dieser Wahl herrühren, oder ob etwas Neues hinzugekommen ist.

Dies genügt als vorläufige Begründung, warum wir, mit Rücksicht auf die uns vorliegende spezielle Aufgabe, von der traditionellen Darstellungsform der Elektricitätslehre abweichen. Es sei nur noch hinzugefügt, daſs das Heaviside'sche Einheitssystem noch nicht vorlag, als C. A. Bjerknes zum ersten Male den Vergleich der elektrischen und hydrodynamischen Erscheinungen durchführte, und daſs die die Analogie scheinbar störenden Irrationalitäten ihm die gröſsten Schwierigkeiten in den Weg legten.

**114. Einführung anderer Parameter.** — Neben der fundamentalen Polintensität $\hat{E}$ werden wir auch aus Zweckmäſsigkeitsgründen eine andere, $\bar{E}$, einführen, welche durch Multiplikation von $\hat{E}$ mit der ponderomotorischen Aktivitätskonstante des umgebenden Mediums entsteht

(a) $$\bar{E} = q\hat{E}.$$

$\bar{E}$ ist einfach als eine Rechengröſse anzusehen. Vom physikalischen Standpunkte aus betrachtet bleibt dagegen $\hat{E}$ der fundamentale Parameter, der unter allen Umständen sich gleich bleibt, solange nicht der Zustand des fernwirkenden Körpers durch einen Elektrisierungs- oder Magnetisierungsprozeſs verändert wird. Zur Unterscheidung nennen wir $\hat{E}$ die wahre, $\bar{E}$ die freie Polintensität. Dieselbe Gröſse $\bar{E}$ haben wir auch schon in unseren deduktiven hydrodynamischen Entwicklungen unter dem Namen des Pulsationsmomentes eingeführt [I, **104** (d), (d''), (B)].

Zur Vervollständigung des Systems unserer Bezeichnungen führen wir noch den reciproken Wert $k$ der ponderomotorischen Aktivitätskonstante $q$ ein:

(b) $$k = \frac{1}{q}.$$

Mit Rücksicht auf die später hervortretende physikalische Bedeutung dieser Gröſse werden wir sie als die Polarisierbarkeit des Mediums bezeichnen. Hydrodynamisch stellt diese Konstante das spezifische Volumen, oder, wie wir sie auch genannt haben, die Be-

weglichkeit der Flüssigkeit dar (10). Dieser Parameter $k$ ist ebensowenig wie $q$ absolut meſsbar. Dagegen können wir die Verhältniszahlen der Polarisierbarkeit für irgend zwei Medien messen. Stellt $k_0$ die elektrische Polarisierbarkeit des leeren Raumes dar, so sind die Verhältniszahlen

$$\text{(b')} \qquad \varepsilon_1 = \frac{k_1}{k_0}, \quad \varepsilon_2 = \frac{k_2}{k_0}, \quad \varepsilon_3 = \frac{k_3}{k_0} \ldots,$$

was man die Dielektricitätskonstante oder die spezifische induktive Kapacität der Medien 1, 2, 3, ... zu nennen pflegt. Stellt $k_0$ die magnetische Polarisierbarkeit des leeren Raumes dar, so sind die Verhältniszahlen

$$\text{(b'')} \qquad \mu_1 = \frac{k_1}{k_0}, \quad \mu_2 = \frac{k_2}{k_0}, \quad \mu_3 = \frac{k_3}{k_0}, \ldots$$

die magnetischen Permeabilitäten der Medien 1, 2, 3, ...

Auf diese Verhältniszahlen brauchen wir jedoch im folgenden nicht zurückzugreifen, da wir uns nie mit praktischen Messungen beschäftigen werden. Wir werden durchgehend mit den absoluten Gröſsen, Polarisierbarkeit $k$ oder ponderomotorischer Aktivitätskonstante $q$ weiter arbeiten.

Mit dem vervollständigten Bezeichnungssysteme können wir das Wechselwirkungsgesetz 112 (b) in den folgenden drei äquivalenten Formen schreiben:

$$\text{(c)} \qquad F = \pm\, q \frac{\dot{E}_k \dot{E}_g}{4\pi r^2} = \pm \frac{\dot{E}_k E_g}{4\pi r^2} = \pm\, k \frac{E_k E_g}{4\pi r^2},$$

von denen die mittlere, unsymmetrische Form oft besonders bequem ist.

# Zweiter Abschnitt.

## Elektrische, magnetische und hydrodynamische Fernwirkungen niederer Ordnung.

**115. Kräftefunktion für die Wechselwirkung beliebig vieler Pole.** — Das Wechselwirkungsgesetz 114 (c) ist nur bewiesen für Körper, welche kleine Dimensionen im Vergleiche zu ihren gegen-

seitigen Abständen haben. Unter diesen Verhältnissen ist aber auch das Superpositionsprinzip gültig (**106**), und die Kombination des Wechselwirkungsgesetzes mit dem Superpositionsprinzipe gestattet Formeln für die Wechselwirkungen beliebig vieler Körper mit grofsen gegenseitigen Abständen aufzustellen.

Wenn wir dabei unsere Entwickelungen hydrodynamisch interpretieren, so können wir selbstverständlich nur zu solchen Resultaten zurückkommen, die wir früher auf deduktivem Wege gefunden haben. Die Übereinstimmung wird dadurch gleichzeitig eine Verifikation der Richtigkeit der Entwickelungen und einen Beweis für die Vollständigkeit der Analogie geben.

Die durch die Formeln **114** (c) gegebene Kraft zwischen zwei Polen läfst sich auch durch eine Kräftefunktion darstellen, nämlich

$$\Psi_{kg} = \mp \frac{\dot{E}_k \dot{E}_g}{4\pi r_{kg}}, \tag{a}$$

wo sich wieder das obere Vorzeichen auf den elektrischen oder magnetischen, das untere auf den hydrodynamischen Fall bezieht. Bei der hydrodynamischen Interpretation stimmt diese Formel mit I, **196** (d) überein.

Es seien nun $n$ solcher Pole gegeben, und es sei $g$ ein beliebiger derselben. Wir suchen die Wirkung, welche die $n-1$ übrigen auf diesen einen Pol $g$ ausüben. Zufolge des Superpositionsprinzipes summieren sich die einzelnen Kräftefunktionen, und die Gesamtwirkung läfst sich durch

$$\Psi_g = \mp \dot{E}_g \sum_{k \gtrless g}^{k} \frac{\dot{E}_k}{4\pi r_{kg}} \tag{b}$$

darstellen, wo rechts $n-1$ Glieder vorkommen, da der laufende Index $k$ nie gleich $g$ wird.

In ähnlicher Weise kann man die Kräftefunktionen aufstellen, welche die Kraft gegen jedes einzelne der $n$ Körperchen geben, und dann durch Zusammensetzung eine einzige Kräftefunktion

$$\Psi = \mp \tfrac{1}{2} \sum^{g} \sum_{g \gtrless k}^{k} \frac{\dot{E}_g \dot{E}_k}{4\pi r_{kg}}, \tag{c}$$

bilden, welche sämtliche Wechselwirkungen im Polsystem darstellt. Der Faktor $\frac{1}{2}$ ist hinzugefügt, weil jedes in (b) einmal auftretende Glied in (c) zweimal auftritt; im übrigen sind bei der Summation

alle Glieder auszuschliefsen, wo die zwei laufenden Indices einander gleich werden.

**116. Kräftefunktion für die Wechselwirkung eines Poles und eines Polkomplexes.** — Die Erfahrung zeigt, dafs beim Magnetismus die Pole nie isoliert, sondern nur als Polpaare vorkommen, wo die zwei Pole gleiche Intensitäten, aber entgegengesetzte Vorzeichen haben. Dies tritt bei dem bekannten Versuche mit dem Zerbrechen des Magnets zu Tage. Ähnlichem begegnet man auch bei dem Studium gewisser elektrischer Erscheinungen. So scheint ein Turmalinkrystall ein vollständiges Analogon zu einem Magnet zu bilden, und der Versuch mit dem Zerbrechen eines solchen Krystalls führt zu dem gleichen Resultate wie bei dem Magneten.[1]

Es ist deshalb wichtig, eine solche Umformung der vorhergehenden Formeln vorzunehmen, dafs sie sich ausdrücklich auf Polpaare beziehen. Die Umformung wird auch im hydrodynamischen Falle gültig sein, unter der Voraussetzung, dafs die pulsierenden Körperchen in ähnlicher Weise paarweise auftreten.

Wir betrachten daher zunächst die Kraftwirkung, welche zwei Pole $k$ und $h$ auf einen dritten $g$ ausüben. Die Wechselwirkungen zwischen $k$ und $h$ berücksichtigen wir dagegen nicht. Die Kräftefunktion für die gesuchte Kraft läfst sich dann nach **115** (b) in der Form

$$\text{(a)} \qquad \Psi_g = \mp \dot{E}_g \left\{ \frac{\dot{E}_k}{4\pi r_{kg}} + \frac{\dot{E}_h}{4\pi r_{hg}} \right\}$$

schreiben. Wir setzen voraus, dafs die Polintensitäten $\dot{E}_k$ und $\dot{E}_h$ entgegengesetzte Vorzeichen haben; an Gröfse sollen sie aber der Allgemeinheit halber einander nicht gleich sein. Das Gebilde, welches durch Zusammensetzung ungleich starker Pole entgegengesetzten Vorzeichens entsteht, werden wir einen Polkomplex nennen, während wir den Namen Polpaar nur in dem Spezialfall benutzen, wo die Pole entgegengesetzt gleich sind. Wir zerlegen $\dot{E}_k$ in zwei Teile:

$$\dot{E}_k = \dot{E}_k^0 + \dot{E}_k^1,$$

wo für den letzten Teil

$$\dot{E}_k^1 = -\dot{E}_h$$

gelten soll. Dadurch lösen wir den Polkomplex in einen Pol und ein Polpaar auf. Die Kräftefunktion $\Psi_g$ läfst sich dann in der Form

[1] W. Voigt, Göttinger Nachrichten 1896; Wied. Ann. 69, S. 368. 1897.

$$\text{(a}')\qquad \Psi_g = \mp \dot{E}_g \left\{ \frac{\bar{E}_k^0}{4\pi r_{kg}} + \bar{E}_k^1 \left( \frac{1}{4\pi r_{kg}} - \frac{1}{4\pi r_{hg}} \right) \right\}$$

schreiben.

Weiter nehmen wir an, dafs die Körperchen $k$ und $h$ klein höherer Ordnung sind, so dafs sie unendlich nahe aneinander rücken können, während doch ihr gegenseitiger Abstand grofs im Vergleich zu ihren Dimensionen bleibt. Wenn aber die Punkte $k$ und $h$, welche die Koordinaten $a_k$, $b_k$, $c_k$ und $a_h$, $b_h$, $c_h$ haben, einander unendlich nahe gerückt sind, so können wir sagen, dafs die Funktion $\frac{1}{r_{kg}}$ aus der Funktion $\frac{1}{r_{hg}}$ dadurch entstanden ist, dafs die Gröfsen $a_h$, $b_h$, $c_h$ durch die sehr nahe liegenden Werte $a_k$, $b_k$, $c_k$ ersetzt sind. Unter Vernachlässigung von Gröfsen höherer Ordnung können wir dann nach TAYLOR's Theorem

$$\frac{1}{r_{kg}} = \frac{1}{r_{hg}} + \left\{ (a_k - a_h) \frac{\partial}{\partial a_k} \frac{1}{r_{kg}} + (b_k - b_h) \frac{\partial}{\partial b_k} \frac{1}{r_{kg}} + (c_k - c_h) \frac{\partial}{\partial c_k} \frac{1}{r_{kg}} \right\}$$

schreiben. Der Wert des inneren Parentheseausdrucks in dem vorstehenden Ausdruck von $\Psi$ wird deshalb

$$\frac{1}{4\pi r_{kg}} - \frac{1}{4\pi r_{hg}} = (a_k - a_h) \frac{\partial}{\partial a_k} \frac{1}{4\pi r_{kg}} + (b_k - b_h) \frac{\partial}{\partial b_k} \frac{1}{4\pi r_{kg}} + (c_k - c_h) \frac{\partial}{\partial c_k} \frac{1}{4\pi r_{kg}}.$$

Indem wir diesen Wert einsetzen, können wir eine Vektorgröfse $\bar{S}_k$ mit den Komponenten

$$\text{(b)}\quad \bar{F}_k = \bar{E}_k^1 (a_k - a_h), \quad \bar{G}_k = \bar{E}_k^1 (b_k - b_h), \quad \bar{H}_k^1 = \bar{E}_k^1 (c_k - c_h)$$

definieren, und können annehmen, dafs diese Gröfse konstante endliche Werte beibehält, während die Differenzen $a_k - a_h$, $b_k - b_h$, $c_k - c_h$ gegen Null konvergieren. Der Vollständigkeit halber erwähnen wir gleich, dafs wir neben $\bar{S}_k$ auch einen Vektor $\dot{S}_h$ definieren können, welcher die Komponenten

$$\text{(b}')\quad \dot{F}_k = \dot{E}_k^1 (a_k - a_h), \quad \dot{G}_k = \dot{E}_k^1 (b_k - b_h), \quad \dot{H}_h = \dot{E}_h^1 (c_k - c_h)$$

und dieselbe Beziehung zu $\bar{S}_k$ hat wie die wahre Polintensität $\dot{E}$ zu der freien $\bar{E}$. Wir werden im elektrischen, im magnetischen und im hydrodynamischen Falle gemeinschaftlich den Vektor (b) als das freie, den Vektor (b′) als das wahre Aktionsmoment des Polpaares bezeichnen.

Wenn wir (b) einführen, und zugleich im ersten Gliede von $\Psi_g$ den Index Null fortlassen, so erhalten wir die Kräftefunktion in der Form

$$\text{(c)}\quad \Psi_g = \mp \acute{E}_g \left\{ \frac{\bar{E}_k}{4\pi r_{kg}} + \bar{F}_k \frac{\partial}{\partial a_k} \frac{1}{4\pi r_{kg}} + \bar{G}_k \frac{\partial}{\partial b_k} \frac{1}{4\pi r_{kg}} + \bar{H}_k \frac{\partial}{\partial c_k} \frac{1}{4\pi r_{kg}} \right\}.$$

Mit gleichem Rechte hätten wir aufserhalb der Parenthesen die freie Polintensität $\bar{E}_g$ und innerhalb die wahre Polintensität $\acute{E}_k$ und das wahre Aktionsmoment $\acute{F}_k$, $\acute{G}_k$, $\acute{H}_k$ schreiben können. Oder schliefslich hätten wir ausschliefslich die wahren Polintensitäten und Aktionsmomente benutzen, und den Faktor $q$ explicite ausschreiben können, also

$$\text{(c')}\quad \Psi_g = \mp q \acute{E}_g \left\{ \frac{\acute{E}_k}{4\pi r_{kg}} + \acute{F}_k \frac{\partial}{\partial a_k} \frac{1}{4\pi r_{kg}} + \acute{G}_k \frac{\partial}{\partial b_k} \frac{1}{4\pi r_{kg}} + \acute{H}_k \frac{\partial}{\partial c_k} \frac{1}{4\pi r_{kg}} \right\}.$$

Wenn gleichzeitig $n - 1$ Körper $k$ dieser Art ihre Fernwirkungen auf den Pol $g$ ausüben, so ergiebt sich die Kräftefunktion durch Superposition. Also, indem wir die Form (c) zu Grunde legen

$$\text{(d)}\quad \Psi_g = \mp \acute{E}_g \sum_{k \gtrless g}^{k} \left\{ \frac{\bar{E}_k}{4\pi r_{kg}} + \bar{F}_k \frac{\partial}{\partial a_k} \frac{1}{4\pi r_{kg}} + \bar{G}_k \frac{\partial}{\partial b_k} \frac{1}{4\pi r_{kg}} + \bar{H}_k \frac{\partial}{\partial c_k} \frac{1}{4\pi r_{kg}} \right\}.$$

Wenn wir in diesen Formeln die Aktionsmomente gleich Null setzen, so kommen wir auf die früheren Kräftefunktionen für einfache Pole zurück. Setzen wir andererseits die Polintensitäten der Körper $k$ gleich Null, so erhalten wir die Kräftefunktionen für die Wirkung reiner Polpaare auf einen Pol. Dies entspricht dem wichtigen Fall von der Wirkung von Elementarmagneten auf einen Magnetpol, oder von pyroelektrischen Krystallen auf ein elektrisch geladenes Körperchen. Wenn wir keine Beschränkungen einführen, so ist jeder Körper als die Kombination eines Poles und eines Polpaares aufzufassen. Ein Turmalinkrystall, welcher zugleich eine Ladung hat, entspricht diesem allgemeinsten Fall.

An die analytische Umformung, welche von der Kräftefunktion zweier getrennter Pole zu der eines Polpaares führt, knüpft man wieder in der Lehre von Elektricität und Magnetismus einen physikalischen Induktionsschlufs. Die Vorstellung von einem Elementarmagnet als etwas, das durch eine Synthese von entgegengesetzten Polen entstanden ist, giebt man auf. Sie hat ihren Dienst als vorläufige Hilfsvorstellung gethan; der durch diese Hilfsvorstellung gefundene Vektor, das Aktionsmoment (b) oder (b') wird dagegen als selbst-

ständige Fundamentalgröfse aufgefafst, welche den inneren Zustand oder Vorgang darstellt, auf welchem das Fernwirkungsvermögen des Magnets oder des pyroelektrischen Krystalls beruht.

Es ist wieder von Interesse, diesen Induktionsschlufs an dem hydrodynamischen Bilde der elektrischen oder magnetischen Erscheinungen zu prüfen. Ein Hydrodynamiker, welcher mit pulsierenden und oscillierenden Kugeln arbeitet, gelangt auf dem Wege, den wir eben gegangen sind, zu Formeln, welche die Fernwirkung der oscillierenden Kugeln darstellen. Wenn er dann nachher die benutzte Hilfsvorstellung über die Synthese von Polen aufgiebt, und die Körper, welche wie Polpaare wirken, doch als etwas anderes als Polpaare auffafst, macht er einen richtigen Schlufs. Denn die oscillierende Kugel ist etwas anderes als ein pulsierendes Kugelpaar, wie grofs auch die Analogie ihrer Wirkungen sein mag. Das Aktionsmoment, welches wir durch die Hilfsvorstellung von einem pulsierenden Kugelpaar fanden, steht auch in einfacher Beziehung zu der Oscillationsgeschwindigkeit der Kugel. Das wahre oder, wie wir es in unseren deduktiven Entwickelungen nannten, das kinematische Aktionsmoment ist dieser Geschwindigkeit proportional (I, **30**) und das freie, oder wie wir es nannten, das dynamische Aktionsmoment (I, **103**) unterschied sich, wie in den Formeln (b), (b′), nur durch den Faktor $q$, der Dichte der Flüssigkeit, von dem wahren oder kinematischen.

**117. Kräftefunktion für die Wechselwirkung beliebig vieler Pole und Polpaare.** — Um uns eine abkürzende Symbolik für die Erleichterung der folgenden Rechnungen zu verschaffen, können wir sagen, dafs die Funktion innerhalb der Parenthese in **116** (c′) dadurch entstanden ist, dafs wir an der Funktion

$$\frac{1}{4\pi r_{kg}}$$

die Operation

$$\text{(a)} \qquad \chi_k = \acute{E}_k \cdot + \acute{F}_k \frac{\partial}{\partial a_k} + \acute{G}_k \frac{\partial}{\partial b_k} + \acute{H}_k \frac{\partial}{\partial c_k}$$

ausgeführt haben (weiteres über diese Operation vergl. I, **167**). Der Ausdruck **116** (c′) von $\Psi_g$ läfst sich deshalb

$$\Psi_g = \mp q \acute{E}_g \chi_k \frac{1}{4\pi r_{kg}}$$

schreiben, und für den Fall, dafs zwei einzelne Pole $g$ und $h$ und ein Polkomplex $k$ vorhanden sind, ergiebt sich

$$\Psi = \mp\, q \acute{E}_g \chi_k \frac{1}{4\pi r_{kg}} \mp q \acute{E}_h \chi_k \frac{1}{4\pi r_{kh}}.$$

Wir können nun voraussetzen, dafs $\acute{E}_g$ und $\acute{E}_h$ entgegengesetzte Vorzeichen haben, und

$$\acute{E}_g = \acute{E}_g^0 + \acute{E}_g^1$$

schreiben, wobei

$$\acute{E}_g^1 = -\acute{E}_h.$$

Die Kräftefunktion nimmt dann die Form

$$\Psi = \mp\, q \left\{ \acute{E}_g^0 \chi_k \frac{1}{4\pi r_{kg}} + \acute{E}_g^1 \left[ \chi_k \frac{1}{4\pi r_{kg}} - \chi_k \frac{1}{4\pi r_{kh}} \right] \right\}$$

an. Diese Formel entspricht genau **116** (a'), nur dafs an Stelle von $\frac{1}{4\pi r_{kg}}$ und $\frac{1}{4\pi r_{kg}}$ jetzt $\chi_k \frac{1}{4\pi r_{kg}}$ und $\chi_k \frac{1}{4\pi r_{kh}}$ getreten sind. Führen wir deshalb die Rechnung genau wie in **116** durch, indem wir die Pole $g$ und $h$ einander näher rücken lassen und Aktionsmomente $\acute{F}_g$, $\acute{G}_g$, $\acute{H}_g$ analog **116** (b') einführen, so gelangen wir zu einer Formel, welche **116** (c') ähnlich ist, nur dafs die Funktion $\chi_k \frac{1}{4\pi r_{kg}}$ an Stelle von $\frac{1}{4\pi r_{kg}}$, und $\acute{E}_g$, $\acute{F}_g$, $\acute{G}_g$, $\acute{H}_g$ an Stelle von $\acute{E}_k$, $\acute{F}_k$, $\acute{G}_k$, $\acute{H}_k$ getreten sind. Wenn wir dann zuletzt das Operationssymbol $\chi$ noch einmal verwerten, ergiebt sich die Kräftefunktion für die zwei Polkomplexe in der Form:

$$\text{(b)} \qquad \Psi = \mp\, q \chi_g \chi_k \frac{1}{4\pi r_{kg}}.$$

Da das Prinzip von der Wirkung und Gegenwirkung für die einzelnen Pole gültig ist, wird es auch für die Polpaare gültig sein. Durch Differentiation der Funktion $\Psi$ nach den Koordinaten des Körpers $k$ erhält man die auf diesen Körper wirkende Kraft, und durch Differentiation nach den Koordinaten des Körpers $g$ die gleich grofse und entgegengesetzt gerichtete Kraft, welche den Körper $g$ angreift.

Da das Superpositionsprinzip für die einzelnen Pole gültig war, wird es auch für die Polpaare gültig sein. Die Kräftefunktion für ein beliebiges System von Polen und Polpaaren wird deshalb durch

Superposition gefunden werden können, und nach Analogie von der Formel **115** (c) findet man

(c)
$$\Psi = \mp \tfrac{1}{2} q \sum_{g \gtrless k}^{g} \sum^{k} \chi_g \chi_k \frac{1}{4 \pi r_{kg}},$$

welche jetzt alle früheren Formeln für die Fernwirkungen als Spezialfälle in sich enthält.

Diese Formel ist nun mit dem unteren, auf den hydrodynamischen Fall sich beziehenden Vorzeichen identisch mit der Formel I, **176** (d), welche den allgemeinsten Ausdruck für die hydrodynamischen Energiekräfte niederer Ordnung in einem System von gleichzeitig volumändernden und fortschreitenden Kugeln gab. Andererseits stellt dieselbe Formel mit dem oberen Vorzeichen die allgemeinsten ponderomotorischen Wechselwirkungen innerhalb eines Systems von beliebig vielen, weit voneinander entfernten elektrisierten oder magnetisierten Körpern dar, wobei im allgemeinsten Falle gleichzeitig eine Ladung und eine permanente Polarisierung jedes einzelnen Körpers vorkommen kann.

Die inverse Analogie der hydrodynamischen Fernkräfte mit den elektrischen und magnetischen ist damit bewiesen, solange es sich um die Fernkräfte niederer Ordnung handelt, die sich allein geltend machen, solange die Körper hinlänglich grofse gegenseitige Abstände im Verhältnis zu ihren Dimensionen haben.

## Dritter Abschnitt.

### Die Felder als mathematische Hilfs- und physikalische Grundvorstellungen. Der fundamentale Induktionsschlufs der modernen Elektricitätslehre.

**118. Die geometrische Verteilung der Fernkräfte.** — Nachdem wir die oben entwickelten Fernwirkungsformeln gefunden haben, bleibt uns noch die Aufgabe ihrer Diskussion. Besonders wichtig ist es, die räumliche Verteilung der Kräfte zu untersuchen. Dabei fangen wir natürlich mit dem einfachen Falle an, wo das System, welches die Kraft erleidet, ein einziger Pol ist, während das, welches die Kraft ausübt, aus beliebig vielen Polen und Polpaaren bestehen kann.

Den Pol können wir von Stelle zu Stelle in der Umgebung des gegebenen fernwirkenden Systems führen. Die Kraft, welche der Pol in jeder untersuchten Lage erleidet, stellen wir durch einen dort aufgezeichneten Pfeil dar, welcher an Gröfse und Richtung die gemessene Kraft darstellt. Der Inbegriff aller Pfeile, die wir in dieser Weise finden, stellt dann im rein geometrischen Sinne des Wortes ein Vektorfeld dar.

Nichts berechtigt uns, diesem Vektorfelde eine physikalische Bedeutung beizulegen. Von den unendlich vielen Vektorgröfsen dieses Feldes kommt nur einer eine physikalische Realität unstreitig zu, derjenigen nämlich, welche die Kraft dort darstellt, wo sich der bewegliche Pol augenblicklich befindet. In mathematischer Beziehung hat aber die Behandlung des gesamten Feldes den wichtigen Vorzug, dafs man es dabei mit einer stetig verbreiteten, anstatt mit einer einzigen, in einem isolierten Punkte unstetig auftretenden Gröfse zu thun hat. Und wenn einmal dieses Vektorfeld vollständig bekannt ist, so weifs man, welche Kraft den Pol angreifen wird, wenn er an einen beliebigen Punkt des Feldes gebracht wird.

**119. Zwei dem fernwirkenden System eindeutig zugeordnete Vektorfelder.** — Einem gegebenen fernwirkenden Systeme kann man in dieser Weise beliebig viele Vektorfelder zuordnen. Denn ein beweglicher Pol anderer Intensität giebt ein neues Feld. Wenn man aber bestimmte Übereinkünfte macht, so kann man den Vorteil gewinnen, bestimmte, dem fernwirkenden Systeme eindeutig zugeordnete Vektorfelder zu definieren.

Ein solches eindeutig zugeordnetes Feld gewinnt man, wenn man übereinkommt, nicht die Kraft selbst zu registrieren, sondern diese Kraft nach Division mit der Intensität des Poles, welcher die Kraft erleidet. Da die Kraft immer proportional der Stärke des Poles ist, gelangt man zu einer und derselben Vektorgröfse, welche Intensität der Pol auch hat.

Es sei nun $\dot{E}$ die wahre Intensität des Poles, und $X, Y, Z$ die Komponenten der Kraft, welche der Pol erleidet. Die Vektorgröfse, welche wir registrieren, und welche dem gegebenen Systeme von fernwirkenden Körpern eindeutig angehört, hat also die Komponenten:

$$\text{(a)} \qquad \mathfrak{u} = \pm \frac{X}{\dot{E}}, \quad \mathfrak{v} = \pm \frac{Y}{\dot{E}}, \quad \mathfrak{w} = \pm \frac{Z}{\dot{E}}.$$

Das obere Vorzeichen bezieht sich wieder auf den elektrischen oder magnetischen, das untere auf den hydrodynamischen Fall.

Diese Vektorgröſse ist nach der Art und Weise, wie wir sie eingeführt haben, eine Rechengröſse. Sie gestattet uns, einfach durch Multiplikation mit der Polintensität $\bar{E}$, die Kraft zu berechnen, welche ein Pol von dieser Intensität erleiden würde, wenn er an einen beliebigen Punkt des Feldes gebracht wird. Der Vektor wird deshalb als ein zweckmäſsiges Zwischenglied dienen können bei der Lösung zusammengesetzter Aufgaben über die Fernwirkungen. Für diesen Vektor führen wir den Namen der elektrischen, der magnetischen beziehungsweise der hydrodynamischen Feldintensität ein.

Ein anderes, dem gegebenen Systeme eindeutig zugehöriges Vektorfeld hätten wir in der Weise definieren können, daſs wir die registrierte Kraft $(X, Y, Z)$ durch die freie Polintensität anstatt mit der wahren dividiert hätten. Anstatt diesen zweiten Vektor direkt durch die Kraft $(X, Y, Z)$ zu definieren, können wir ihn aber auch aus dem schon definierten Vektor $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$ ableiten. Wenn $k$ die Polarisierbarkeit ist [**114** (b)], so wird der neue Vektor einfach:

$$\text{(b)} \qquad u = k\bar{u}, \qquad v = k\bar{v}, \qquad w = k\bar{w}.$$

Diesen Vektor nennen wir die elektrische, die magnetische, und vorläufig auch die hydrodynamische Polarisation. Er leitet sich also aus der Feldintensität durch Multiplikation mit der Polarisierbarkeit ab. Genau umgekehrt kann man durch Multiplikation mit der ponderomotorischen Aktivitätskonstante $q$ die Feldintensität aus der Polarisation ableiten:

$$\text{(c)} \qquad \bar{u} = qu, \qquad \bar{v} = qv, \qquad \bar{w} = qw.$$

Hervorzuheben ist hier, daſs, während wir in den Definitionsgleichungen (a) unserer Vektorgröſsen das doppelte Vorzeichen beibehalten haben, es in (b) und (c) fortgefallen ist, und überhaupt nicht mehr auftreten wird, solange wir uns nur mit den inneren Beziehungen des Feldes befassen.

**120. Mathematische Eigenschaften der Vektorfelder.** — Wir haben hier zwei Vektorgröſsen nebeneinander definiert, um von Anfang an auf ihre formale Gleichberechtigung aufmerksam zu machen. Da sie aber mittels der einfachen Relationen **119** (b) oder (c) voneinander abhängen, so genügt es, eine derselben zu betrachten. Wir wählen die Feldintensität $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$. Indem wir diese Wahl treffen, schlieſsen wir uns der historischen Entwickelung an. Denn solange

man nur die Größe $\bar{E}$, nicht aber die Größe $q$ oder $k$ kannte, konnte man nur auf diesen einen Vektor geführt werden.

Die Kraft $(X, Y, Z)$, welche der bewegliche Pol $g$ von seiten der übrigen Pole und Polpaare erleidet, ließ sich durch die Kräftefunktion $\Psi_g$ [**116** (d)] darstellen. Wenn wir also

$$X = \frac{\partial \Psi_g}{\partial a_g}, \qquad Y = \frac{\partial \Psi_g}{\partial b_g}, \qquad Z = \frac{\partial \Psi_g}{\partial c_g}$$

schreiben, und nachher, der Definition **119** (a) entsprechend, mit $\pm \bar{E}_g$ dividieren, so finden wir, daß der Vektor $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$ von einem Potential $\varphi$ abhängt, das aus $\Psi_g$ einfach durch Division mit $\bar{E}_g$ entsteht. Um die stetige Verbreitung des Vektors im Raume auszudrücken, ersetzen wir gleichzeitig die in $\Psi_g$ auftretenden Koordinaten $a_g, b_g, c_g$ des Poles $g$ durch die Koordinaten $x, y, z$ eines beliebigen Raumpunktes. Es wird dann

$$\text{(a)} \qquad \bar{u} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad \bar{v} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \qquad \bar{w} = \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

wo man nach **116** (d) für $\varphi$ den folgenden Wert findet:

$$\text{(b)} \quad \varphi = -\sum \left\{ \frac{\bar{E}_k}{4\pi r_k} + \bar{F}_k \frac{\partial}{\partial a_k} \frac{1}{4\pi r_k} + \bar{G}_k \frac{\partial}{\partial b_k} \frac{1}{4\pi r_k} + \bar{H}_k \frac{\partial}{\partial c_k} \frac{1}{4\pi r_k} \right\}.$$

Hier hat also $r_k$ die Bedeutung:

$$r_k = \sqrt{(x - a_k)^2 + (y - b_k)^2 + (z - c_k)^2}.$$

Das Potential $\varphi$ ist in linearer Weise aus der Funktion $\frac{1}{r}$ und aus Ableitungen dieser Funktionen gebildet, und erfüllt deshalb die LAPLACE'sche Gleichung:

$$\text{(c)} \qquad \nabla^2 \varphi = 0.$$

Das Feld ist also in der Ausdehnung, in der wir es bis jetzt kennen, ein LAPLACE'sches oder ein gleichzeitig potentielles und solenoidales (I, **5**, **6**, **7**).

Nach einer Fundamentaleigenschaft eines solenoidalen Vektorfeldes wird der Vektorfluß durch jede geschlossene Fläche, die sich zu einem Punkte kontrahieren kann, ohne mit den Grenzen des Feldes in Berührung zu kommen, gleich Null sein. Wenn aber die

Fläche einen der Pole umgiebt, so kann sie sich nicht unbegrenzt kontrahieren, ohne das Gebiet zu verlassen, wo wir bis jetzt das Vektorfeld definiert haben. In diesem Falle ist der Vektorfluſs durch die Fläche nicht mehr gleich Null, sondern gleich der Polintensität $\bar{E}$ des Poles. Man findet dies sofort, wenn man die Fläche als eine Kugel um den Pol als Mittelpunkt wählt. Da andererseits der Vektorfluſs im solenoidalen Felde von der Form der Fläche unabhängig ist, können wir ganz allgemein die Polintensität gleich dem Vektorfluſs durch eine geschlossene Fläche setzen, welche den Pol umgiebt. Wenn noch allgemeiner die Fläche mehrere Pole umgiebt, so wird der Vektorfluſs gleich der Summe der Polintensitäten, also:

(d) $$\int (\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})_n \, d\sigma = \int \frac{\partial \Phi}{\partial n} \, d\sigma = \sum \bar{E}.$$

Wegen der Relation **119**(b), wo $k$ eine Konstante ist, können die hier abgeleiteten Eigenschaften der Feldintensität auch gleich auf die Polarisation übertragen werden. Im Potential $\varphi$ der Polarisation treten dann die wahren Polintensitäten $\hat{E}$ und Aktionsmomente $(\hat{F}, \hat{G}, \hat{H})$ so auf, wie in (b) die freien. Wir merken uns besonders die Relationen:

(e) $$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \qquad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

wo

(f) $$\nabla^2 \varphi = 0.$$

Der Gleichung (d) entsprechend erhalten wir das Resultat, daſs das Flächenintegral der Polarisation gleich der Summe der wahren Polintensitäten innerhalb der Fläche ist. Ihrer Wichtigkeit halber schreiben wir auch diese Gleichung auf, also

(g) $$\int (u, v, w)_n \, d\sigma = \sum \hat{E},$$

wo $(u, v, w)$ die Komponente der Polarisation senkrecht zu der Fläche bedeutet.

Die Anwendung der zwei Vektorgröſsen, der Feldintensität und der Polarisation, nebeneinander hat selbstverständlich keinen Zweck, solange beide identisch mit denselben Eigenschaften auftreten. Die Gleichungen (d) und (g) lassen aber den Gegensatz hervortreten.

Denn die wahren Polintensitäten $\acute{E}$ bleiben bei dem Übergange von einem Medium zu einem anderen unverändert, die freie $\bar{E}$ dagegen nicht.

**121. Fernwirkungsvorstellungen und Feldvorstellungen.** — Die zugeordneten Felder haben wir nur als mathematische Hilfsmittel für ein bequemeres Studium der Fernkräfte eingeführt. Sie sind auch historisch in dieser Weise in die Lehre der Elektrostatik und des Magnetismus gekommen, lange ehe die Vorstellung von elektrischen und magnetischen Feldern in dem modernen physikalischen Sinne des Wortes entstanden war. Von der historischen Entwickelung sind wir nur in Einzelheiten abgewichen, so beispielsweise, wenn wir das zu jener Zeit noch nicht erfundene Wort „Feld" benutzt, und anstatt eines einzigen zwei zugeordnete Felder nebeneinander eingeführt haben. Denn für die Einführung zweier Felder war damals noch keine Gelegenheit, ehe man die Konstanten $q$ oder $k$ und ihre Bedeutung entdeckt hatte.

Durch die Wege, welche so die im Geiste der Fernwirkungslehre arbeitenden Mathematiker eingeschlagen hatten, wurde in der eigentümlichsten Weise der spätere Umschwung in der Elektricitätslehre vorbereitet. Ein neuer physikalischer Gedanke sollte den schon entwickelten Formeln einen neuen Sinn geben.

Die elektrischen und magnetischen Erscheinungen treten für unsere unmittelbaren Wahrnehmungen als Fernwirkungen auf. Unter den oben angegebenen Versuchen kann aber einer angeführt werden, welcher geeignet ist, die Fernwirkungsvorstellung in zweifelhaftes Licht zu stellen. Dieses ist der Versuch, welcher den Einfluſs zeigt, den das umgebende Medium auf die Fernwirkung hat. Denn dieser Versuch führt zu der Überlegung: Wenn das Medium das Vermögen hat, die Wirkungen in der Ferne zu modificieren, so müssen wir mit der Möglichkeit rechnen, daſs es die Fernwirkungen vielleicht auch verursachen kann.

Ist nun das der Fall, so sind die Fernwirkungen, auf welche wir bis jetzt ausschlieſslich unsere Aufmerksamkeit gerichtet haben, nicht mehr die primären Fundamentalerscheinungen, sondern sekundäre Erscheinungen, welche Folgen, und vielleicht sogar sehr unwesentliche Folgen sind von Erscheinungen, die sich in dem Medium abspielen. Die Aufgabe des Forschers ändert sich dadurch sofort: Früher war das Studium der Fernwirkungen das Ziel, jetzt wird die Beobachtung der Fernkräfte nur Hilfsmittel, und das Ziel wird das Studium des hinter den Fernwirkungserscheinungen liegen-

den Erscheinungskomplexes, dessen Sitz in dem umgebenden Medium zu suchen ist.

**122. Der fundamentale Induktionsschlufs der modernen Elektricitätslehre.** — Ist nun dieser zuerst von FARADAY gefafste Gedanke einmal angenommen, so stellt sich die Frage: Wie soll man diese verborgenen Felderscheinungen, über welche wir nichts anderes wissen, als dafs sie als Ursachen hinter den Fernwirkungen liegen, beschreiben?

Den ersten Schritt für die Beantwortung dieser Frage hat FARADAY selbst gethan durch seine Beschreibung der Felder mit Hilfe der Kraftlinien. Dafs diese FARADAY'sche Beschreibungsform nicht notwendig im Widerspruch mit den Formeln der Mathematiker ist, hat Lord KELVIN nachgewiesen. Die als mathematische Konstruktionen eingeführten Felder stellen auch die Lösung von Problemen über stationäre Wärmeströmung dar, und treten dabei nicht mehr blos als mathematische Konstruktionen, sondern als Repräsentanten für physikalische Realitäten auf. Mit der Möglichkeit, dafs sie auch im elektrischen Falle etwas reell-physikalisches darstellen, mufs deshalb gerechnet werden, und die Annahme, dafs dies wirklich der Fall ist, macht es möglich, die von den Mathematikern schon entwickelten Formeln für die Beschreibung der elektrischen Erscheinungen auch im FARADAY'schen Sinne zu verwerten.[1] Was Lord KELVIN als eine Möglichkeit hinstellt, nimmt schliefslich MAXWELL als Ausgangspunkt seiner ganzen Theorie. Diese jetzt allgemein angenommene Theorie ruht also ganz und gar auf dem folgenden Induktionsschlufs von einzig dastehender Kühnheit, den man bei keiner modernen Darstellung der Lehre von den elektrischen oder magnetischen Erscheinnngen umgehen kann:

*Die Vektorfelder, welche die Mathematiker als reine mathematische Hilfsvorstellungen eingeführt haben, sind die Repräsentanten der realen physikalischen Zustände oder Vorgänge, welche sich in dem umgebenden Medium abspielen.*

Mit anderen Worten, die Vektorgröfsen $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$ oder $(u, v, w)$, welche wir als reine Hilfsgröfsen durch eine formale Definition eingeführt haben, und welche überhaupt nicht in anderer Weise eingeführt werden können, werden an die Spitze gestellt, und als

[1] Sir WILLIAM THOMSON, On the elementary laws of statical electricity. Cambridge and Dublin Mathematical Journal, Nov. 1845. Reprint of papers on Electrostatics and Magnetism S. 15—37.

Repräsentanten der eigentlichen elektrischen oder magnetischen Fundamentalerscheinungen betrachtet. Die einzige direkt beobachtbare Gröfse, die mechanische Kraft ($X, Y, Z$), tritt dagegen in den Hintergrund und wird als Repräsentant für eine weniger wichtige Nebenerscheinung angesehen. Sie hat wesentlich die nur mehr zufällige Bedeutung, unser Hilfsmittel für das Studium der Fundamentalgröfsen ($\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$) oder ($u, v, w$) zu sein. Das COULOMB'sche Fernwirkungsgesetz, welches den Ausgangspunkt unserer Betrachtungen bildete, ist nicht mehr das Fundamentalgesetz der Lehre von Elektrostatik und Magnetismus. Fundamentalgesetze sind dagegen in den Formeln **120** (a) bis (g) enthalten, welche wir als mathematische Eigenschaften von Hilfsgröfsen ableiteten, aber jetzt als die fundamentalen Gesetze der inneren Zustände oder Vorgänge bei den Feldern ansehen.[1]

**123. Der Induktionsschlufs vom Standpunkte der hydrodynamischen Analogie.** — Die Geschichte der Physik kennt kaum ein

[1] Es ist auffällig, wie oft man in den Lehrbüchern über diesen fundamentalen Induktionsschlufs mit Stillschweigen hinweggeht. Ohne es zu merken, kommt man von der reellen mechanischen Kraft, die einen Pol angreift, zu den Vektoren, welche später als Repräsentanten für reale Zustände oder Vorgänge im dielektrischen Medium aufgefafst werden. Alles wird durch eine formale Definition erledigt, und man merkt erst allmählich, wie sich der Gesichtspunkt verschiebt. Bei MAXWELL liegt die Sache insofern anders, als die Einführung der neuen Grundanschauungen mit der Einführung des neuen Vektors der elektrischen Verschiebung verknüpft ist. Wenn man aber jetzt die Einführung überzähliger Vektorgröfsen vermeidet, und die schon im Geiste der Fernwirkungslehre eingeführten Vektoren weiter benutzt, nur in einem ihnen neu beigelegten physikalischen Sinne, so ist es ein Fehler, es nicht aufs deutlichste hervorzuheben. MAXWELL ist auch darüber selbst völlig klar, dafs sein Werk nicht ausschliefslich in Neuschöpfung bestand, sondern zum grofsen Teil eben darin, dafs er den von der Fernwirkungslehre vererbten Formeln einen neuen physikalischen Sinn gegeben hat. Man vergleiche beispielsweise seine Äufserungen in der Vorrede zu „Electricity and Magnetism“:

„I also found that several of the most fertile methods of research discovered by the mathematicians could be expressed much better in terms of ideas derived from FARADAY than in their original form.

The whole theory, for instance, of the potential, considered as a quantity which satisfies a certain partial differential equation, belongs essentially to the method which I have called that of FARADAY. According to the other method, the potential, if it is to be considered at all, must be regarded as the result of a summation of the electrified particles divided each by its distance from a given point. Hence many of the mathematical discoveries of LAPLACE, POISSON, GREEN and GAUSS find their proper place in this treatise, and their appropriate expression in terms of conceptions mainly derived from FARADAY.“

zweites Beispiel eines Induktionsschlusses von solcher Kühnheit, welcher doch einen solchen Erfolg gehabt hat. Die Verifikationen, welche vor allem die HERTZ'schen Entdeckungen gebracht haben, betreffen jedoch immer nur die allgemeinen Züge, nicht die speziellen Konsequenzen des FARADAY-MAXWELL'schen Gedankens. Um so interessanter ist aber auch die Prüfung des Induktionsschlusses im hydrodynamischen Bilde der elektrischen Erscheinungen.

Ein Hydrodynamiker, welcher nur die hydrodynamischen Fernkräfte direkt beobachten kann, und welcher unter genau denselben Verhältnissen wie der Elektriker den Induktionsschlufs macht, dafs es sich nur um scheinbare Fernwirkungen handelt, deren Ursache in den Zuständen oder Vorgängen im umgebenden Medium zu suchen ist, trifft genau das Richtige.

Und noch mehr, diese Fernwirkungen sind vom allgemeinen hydrodynamischen Standpunkte aus äufserst unwesentliche Erscheinungen. Die Haupterscheinungen spielen sich in den Stromfeldern ab, und die Fernkräfte sind nur unbedeutende Begleiterscheinungen.

Die Aufgabe des Hydrodynamikers wird es nun, die in den Stromfeldern sich abspielenden Erscheinungen zu studieren. Und durch diesen Vergleich tritt erst recht die Kühnheit des MAXWELL-schen Gedankens in ihrem vollen Lichte hervor. Denn es ist ebenso kühn, die Theorie der elektrischen Felder mit der Kenntnis nur der elektrischen Fernkräfte entwickeln zu wollen, als es sein würde, die ganze Hydrodynamik auf dem Gesetze von den pulsierenden Kugeln aufzubauen.

Zur Lösung dieser Aufgabe dient dann der speziellere Induktionsschlufs, dafs die als Hilfsgröfsen eingeführten Vektoren $(\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w})$ und $(u, v, w)$ für die Darstellung der Felderscheinungen benutzt werden können. Dieses ist nun wieder richtig. Denn diese Gröfsen sind nicht nur brauchbare, sondern einfach die besten Vektorgröfsen, die für die Beschreibung hydrodynamischer Stromfelder angewendet werden können. Die Kraft, welche eine pulsierende Kugel mit der Pulsationsintensität $\grave{E}$ in einem hydrodynamischen Stromfelde erleidet, ist nämlich durch die Formeln

$$X = -q\grave{E}u, \quad Y = -q\grave{E}v, \quad Z = -q\grave{E}w$$

gegeben [**14**(a); I, **129**]. Dividieren wir nun nach **119** (a) mit $-\grave{E}$, so erhalten wir die Vektorgröfse, die wir früher (I, **100**) unter dem Namen der hydrodynamischen Feldintensität für die Beschreibung von hydrodynamischen Stromfeldern benutzt haben, und welche auch

als die Bewegungsgröſse, oder der Impuls pro Volumeinheit der Flüssigkeit definiert werden kann. Wenn wir andererseits nach **119**(b) mit $-\dot{E}$ dividieren, so erhalten wir die noch einfachere Gröſse, die Geschwindigkeit $(u, v, w)$ im Stromfelde, welche wir von Anfang an für die Beschreibung der hydrodynamischen Stromfelder benutzt haben.

Die Eigenschaften, welche die Formeln **120**(e) und (f) der Geschwindigkeit beilegen, führen endlich zu den ersten Prinzipien der Hydrodynamik zurück. Denn diese Formeln sind nichts anderes als die Formeln I, S. 22, **15**(a) und (b), welche den fundamentalen Ausgangspunkt unserer ersten deduktiven Entwickelungen bildeten.

Auf allen Punkten zeigt sich deshalb das Merkwürdige, daſs, wenn ein Hydrodynamiker, welcher nur die hydrodynamischen Fernkräfte kennt, den von MAXWELL in der Elektricitätslehre eingeschlagenen Weg verfolgt, er den Weg, und zwar den einzigen einschlägt, welcher von den hydrodynamischen Fernkräften zu der Hydrodynamik führt.

Des Überblickes halber stellen wir noch das folgende Schema der einander entsprechenden elektrischen, magnetischen und hydrodynamischen Gröſsen auf:

| | Elektricität oder Magnetismus. | Hydrodynamik. |
|---|---|---|
| $q$ | Ponderomotorische Aktivitätskonstante des Mediums. | Dichte der Flüssigkeit. |
| $k$ | Polarisierbarkeit des Mediums. | Specifisches Volumen oder Beweglichkeit (**10**) der Flüssigkeit. |
| $\dot{E}$ | Wahre Polintensität (Ladung, Masse). | Wahre Pulsationsintensität (I, **22**). |
| $\bar{E}$ | Freie Polintensität (Ladung, Masse). | Freie Pulsationsintensität (Pulsationsmoment [I, **104**(B)]. |
| $\dot{S}(\dot{F}, \dot{G}, \dot{H})$ | Wahres elektrisches oder magnetisches Moment. | Wahres oder kinematisches Aktionsmoment (I, **26**, **30**). |
| $\bar{S}(\bar{F}, \bar{G}, \bar{H})$ | Freies elektrisches oder magnetisches Moment. | Freies oder dynamisches Aktionsmoment (I, **103**). |
| $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$ | Elektrische oder magnetische Feldintensität (Kraft). | Hydrodynamische Feldintensität (Bewegungsgröſse oder Impuls pro Volumeinheit (I, **94**). |
| $(u, v, w)$ | Elektrische oder magnetische Polarisation (Induktion). | Geschwindigkeit. |

## Vierter Abschnitt.

### Die Felder in vollständig homogenen Medien.

**124. Erweiterung des Superpositionsprinzipes.** — Nachdem wir das Feld als den Sitz der fundamentalen elektrischen und magnetischen Erscheinungen erkannt haben, ist der Weg, den wir weiter verfolgen müssen, gegeben. Wir kennen die Felder bis jetzt nur in sehr beschränkter Ausdehnung. Denn die zu ihrer Definition dienenden Kräfte sind uns nur bekannt, solange die wirkenden Körper klein im Vergleich zu ihren gegenseitigen Abständen sind. Wir müssen uns deshalb weitere Erfahrungen über die Fernkräfte verschaffen, um dadurch die Felder bis zu der Grenzfläche und selbst im Innern von Körpern endlicher Ausdehnung kennen zu lernen.

Der erste Schritt wird durch eine erfahrungsmäfsig erlaubte Erweiterung des Superpositionsprinzipes möglich gemacht. Denn wenn man gewisse Beschränkungen in Bezug auf die stoffliche Natur der Körper und des umgebenden Mediums einführt, so wird das Prinzip ohne jede Beschränkung in Bezug auf die Abstände, Dimensionen und Formen der Körper gültig sein. Die Beschränkung besteht darin, dafs der Stoff, aus dem die Körper bestehen, dieselbe ponderomotorische Aktivitätskonstante wie das umgebende Medium haben soll. Mit der Frage, wie man die Konstanten zweier Körper in der Praxis miteinander vergleicht, haben wir hier nichts zu thun. Es sei nur an den idealen Versuch erinnert, wo wir die Anziehung zweier Körper in zwei verschiedenen Medien vergleichen (**109**). Als Medium kann man in einem Versuche auch den Stoff anwenden, aus dem man in anderen Versuchen die Körper herstellt. Selbst wenn es sich um elastisch feste Medien handelt, ist der Versuch denkbar. Denn die Kräfte, welche zwei im Innern eines solchen Mediums befindliche elektrisierte Körperchen aufeinander ausüben, kann man nach den erzeugten Spannungen beurteilen.

Hat man also nach dieser oder irgend einer anderen Methode die Aktivitätskonstante des Stoffes, aus dem die Körper bestehen, mit derjenigen des umgebenden Mediums verglichen, und genau gleich grofs gefunden, so sagen wir, dafs die Körper mit dem umgebenden Medium zusammen ein einziges in elektrischer beziehungsweise in magnetischer Beziehung homogenes Medium bilden. Liegt dieser Fall vor, und mifst man dann die Kräfte, welche die

Körper ausüben, teils wenn nur je einer vorhanden ist, und teils wenn alle gleichzeitig vorhanden sind, so findet man immer die Resultante aus den Einzelkräften nach der Parallelogramm- oder Polygonkonstruktion, ganz abgesehen von den gegenseitigen Abständen, von den Dimensionen oder den Formen der Körper. Als eine fundamentale Erfahrung stellen wir also die folgende auf:

*In einem vollständig homogenen Medium superponieren sich immer die elektrischen oder magnetischen Fernkräfte, ohne einander zu stören.*

Wenn wir dieses Prinzip den nächstfolgenden Entwickelungen zu Grunde legen, so weichen wir etwas von der traditionellen, von den Erbschaften der Fernwirkungslehre noch nicht befreiten Darstellungsform ab. Denn das Recht zum Superponieren, wenn man es überhaupt begründet, sucht man in der Elektricitätslehre gewöhnlich darin, daſs man anfänglich nur „einfluſslose" Körper behandelt, im Gegensatz zu den später zu behandelnden dielektrischen Körpern. Im Magnetismus erzielt man dasselbe, indem man die Vorstellung von Magneten aus „absolut hartem Stahl" einführt, womit man Magnete meint, in denen sich eine temporäre Magnetisierung über die vorhandene permanente nicht mehr überlagern kann. Der absolut harte Stahl muſs also auch diese Eigenschaft der Einfluſslosigkeit besitzen.. Es widerspricht aber dem Sinne der durchgeführten FARADAY-MAXWELL'schen Theorie, einem Körper Einfluſslosigkeit als innere Eigenschaft beizulegen. Ob eine Influenzerscheinung zu stande kommt, beruht nicht auf einem, sondern stets auf zwei Körpern. Es handelt sich um eine Kontrastwirkung; wenn der Kontrast verschwindet, so fällt die Influenz fort, und das Superpositionsprinzip wird gültig.

Wenn wir im folgenden die Theorie der elektrostatischen und der magnetischen Erscheinungen auf der Grundlage dieses Superpositionsprinzipes weiter verfolgen, so haben wir nicht mehr wie früher Gelegenheit, jeden einzelnen Schluſs im hydrodynamischen Bilde dieser Erscheinungen zu prüfen. Die Ursache, warum diese Möglichkeit abgeschnitten ist, wird später hervortreten. Aber statt der einzelnen Schlüsse können wir die schlieſslichen Resultate der Schlüsse prüfen, und dadurch werden neue Seiten der Analogie hervortreten.

**125. Die Fernwirkung zwischen Körpern endlicher Ausdehnung.** — Unsere früheren Formeln für die Fernwirkung zwischen kleinen Körpern in groſsen gegenseitigen Abständen wurden mit Hilfe des

elementaren Wechselwirkungsgesetzes [**112** (b)] in Verbindung mit dem beschränkteren Superpositionsprinzipe (**106**) entwickelt. Die Erweiterung des Superpositionsprinzipes macht den Übergang zu der Betrachtung von Körpern endlicher Ausdehnung in beliebig kleinen gegenseitigen Abständen möglich.

Zunächst betrachten wir die Wirkung, welche ein Pol $g$ mit der Polintensität $\acute{E}_g$ von seiten der Körperchen 1, 2, 3, ... erleidet. Solange die Bedingung von den grofsen gegenseitigen Abständen erfüllt ist, sind die früheren Fernwirkungsformeln anwendbar, und zwar **115** (b), wenn die übrigen Körper nur Pole, dagegen **116** (d) wenn allgemeiner die übrigen Körper Kombinationen von Polen und Polpaaren sind.

Wenn wir nun von den Wechselwirkungen unter den Körpern $k$ absehen, und nur die Wirkung auf $g$ betrachten, so werden die Formeln nach dem erweiterten Superpositionsprinzipe gültig bleiben, wie nahe auch die Körper 1, 2, 3, ... gegeneinander rücken. Nur mufs der Abstand des Poles $g$ von jedem Körperchen $k$ grofs im Vergleich zu den Dimensionen der einzelnen Körperchen bleiben; denn sonst würde das zu Grunde liegende Wechselwirkungsgesetz nicht mehr gültig bleiben. Aber hierdurch ist doch kein kleinster Abstand gegeben, welchen der Körper $g$ von dem durch das Zusammenbringen der Körperchen $k$ gebildeten endlichen Körper haben mufs. Denn je kleiner man die elementaren Körperchen nimmt, um so kleiner wird dieser Abstand. Mit anderen Worten, die schon aufgestellten Fernwirkungsformeln sind auch dann gültig, wenn die Körperchen $k$ zusammen einen Körper endlicher Ausdehnung bilden, und wenn sich der unendlich kleine Pol $g$ beliebig nahe, nur nicht in Berührung mit diesem Körper befindet.

Wir können zuletzt noch die Summenformeln durch kubische Integrale ersetzen, indem wir annehmen, dafs die gewöhnlichen Kontinuitätsbedingungen erfüllt sind. Halten wir also an der Vorstellung fest, dafs der endliche Körper wirklich durch eine Synthese der ursprünglich getrennten Körperchen gebildet ist, so müssen wir annehmen, dafs diese Körperchen schon von Anfang an solche Formen haben, dafs sie nach der Zusammensetzung den Raum stetig erfüllen, und solche Polintensitäten beziehungsweise Aktionsmomente, dafs in dem gebildeten endlichen Körper die Polintensität pro Flächen- oder Volumeinheit und das Aktionsmoment pro Volumeinheit stetig veränderliche Gröfsen werden.

Es seien nun $x_1, y_1, z_1$ die Integrationsbuchstaben, $d\tau_1$ das Volum-, $d\sigma'_1$ das Flächenelement, $\acute{e}_1$ und $\acute{e}'_1$ die freien Polintensitäten be-

ziehungsweise der Volum- und Flächeneinheit, $f_1, g_1, h_1$ die Komponenten des freien Aktionsmomentes pro Volumeinheit. $\bar{e}_1$ nennen wir dann im elektrischen und magnetischen Falle gemeinschaftlich die freie Aktionsdichte, $(f_1, g_1, h_1)$ die freie Aktionsintensität. Endlich seien $r_{1g}$ und $r'_{1g}$ die Abstände des Poles mit den Koordinaten $a_g, b_g, c_g$ von dem Volumelemente mit den laufenden Koordinaten $x_1, y_1, z_1$ beziehungsweise von dem Flächenelemente mit den Koordinaten $x'_1, y'_1, z'_1$. Wir erhalten dann aus der Summenformel **115** (b) die Kräftefunktion:

$$\text{(a)} \qquad \Psi = -\dot{E}_g \int \frac{\bar{e}_1 \, d\tau_1}{4\pi r_{1g}} - \dot{E}_g \int \frac{\bar{e}'_1 \, d\sigma'_1}{4\pi r'_{1g}}.$$

Aus der Summenformel **116** (d) ergiebt sich ganz entsprechend, indem wir der Einfachheit halber die Ladung $\dot{E}_k$ jedes Körperchens $k$ gleich Null setzen:

$$\text{(b)} \quad \Psi = -\dot{E}_g \int \left\{ f_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{4\pi r_{1g}} + g_1 \frac{\partial}{\partial y_1} \frac{1}{4\pi r_{1g}} + h_1 \frac{\partial}{\partial z_1} \frac{1}{4\pi r_{1g}} \right\} d\tau_1.$$

Die letzte Formel läfst sich durch teilweise Integration über das ganze Volumen des Magnets oder des polarelektrisierten Körpers auch auf die Form (a) bringen, wenn man die Bezeichnungen

$$\text{(c)} \qquad \begin{aligned} \bar{e}_1 &= -\left\{ \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial g_1}{\partial y_1} + \frac{\partial h_1}{\partial z_1} \right\} \\ \bar{e}'_1 &= f'_1 \cos n, x_1 + g'_1 \cos n, y_1 + h'_1 \cos n, z_1 = (f'_1 g'_1 h'_1)_n \end{aligned}$$

einführt. Die mit Accenten versehenen Buchstaben beziehen sich auf die Werte, welche die betreffenden Gröfsen an der Grenzfläche haben.

Während die Formel (b) der physikalisch richtigeren Vorstellung entspricht, dafs der Magnet aus Elementarmagneten zusammengesetzt ist, liegt der Formel (a) in ihrer Anwendung auf Magnete die unwirkliche, aber oft praktisch nützliche Vorstellung zu Grunde, dafs er durch Zusammenbringung von magnetischen Massen zu stande gekommen ist, teils Massen mit endlicher kubischer Dichte, teils Massen mit unendlicher kubischer, aber endlicher Flächendichte.

Wenn der zweite Pol nicht mehr punktförmig, sondern ein Körper endlicher Ausdehnung ist, so können wir uns ihn in ähnlicher Weise durch Zusammenbringen von Elementen gebildet denken. Um das Aufschreiben überflüssig vieler Formeln zu vermeiden, be-

nutzen wir den Umstand, dafs die Fernwirkung eines Magnets in derselben Form wie die Fernwirkung eines Systems von Massen geschrieben werden kann. Die Summenformel 115 (c) kann dann zu Grunde gelegt werden, und indem wir aus den gegebenen ursprünglich getrennten Körperchen Körper endlicher Ausdehnung zusammensetzen, geht die Summenformel über in das Integral:

$$\Psi = -\tfrac{1}{2}\int\int\frac{\acute{e}_1\,\bar{e}_2\,d\tau_1\,d\tau_2}{4\pi r_{12}}, \tag{d}$$

wo die Summation über alle Produkte der freien Dichte des einen in die wahre Dichte des anderen Volumelementes auszudehnen ist, und wo das Auftreten von Flächendichten nicht ausgeschlossen ist.

In der Summenformel 115 (c) waren wir gezwungen alle Glieder auszuschliefsen, wo $g = k$ war, weil diese Glieder unendlich wurden und keine physikalische Bedeutung hatten. Nach dem Übergang zu der Integralform ist es aber nicht mehr notwendig, die Integralelemente auszuschliefsen, wo die Volumelemente $d\tau_1$ und $d\tau_2$ untereinander identisch sind. Denn welches auch die physikalische Bedeutung dieser Glieder sein mag, deren gegenseitiger Abstand $r_{12}$ gegen Null konvergiert, so liefern sie keinen endlichen Beitrag zu dem Wert des Integrals, wie eine bekannte einfache Diskussion der Grössenordnungen zeigt.

**126. Ausdehnung der Felder bis zu der Grenzfläche der wirkenden Körper.** — Nichts hindert uns nun, die Definitionsgleichungen 119 (a) des Vektors $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$ beizubehalten, und da wir jetzt die Kraft kennen, welche ein Pol $g$ in jedem Punkte aufserhalb des wirkenden Körpers erleidet, so wird damit auch der Vektor $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$ in jedem Punkte aufserhalb des wirkenden Körpers bekannt sein. Der Vektor bleibt potentiell:

$$\bar{u} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad \bar{v} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \qquad \bar{w} = \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \tag{a}$$

Das Potential entsteht aus 125 (a) durch Division mit $\acute{E}_g$:

$$\varphi = -\int\frac{\bar{e}_1\,d\tau_1}{4\pi r_1} - \int\frac{\bar{e}'_1\,d\sigma'}{4\pi r'}. \tag{b}$$

Dabei denken wir uns wie gewöhnlich die in den Abstandsausdruck $r$ ursprünglich eingehenden Koordinaten $a_g, b_g, c_g$ des Poles $g$ durch die Koordinaten $x, y, z$ freier Raumpunkte ersetzt, so dafs

$$r_1 = \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2}, \quad r' = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$$

wird. In Bezug auf diese $x, y, z$ bildet man in (a) die Ableitungen.

Aufser der Potentialeigenschaft (a) hat das Feld auch die Solenoidaleigenschaft

$$\text{(c)} \qquad \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0, \quad \text{oder} \quad \nabla^2 \varphi = 0,$$

oder das Feld ist im ganzen äufseren Raume ein LAPLACE'sches Feld (I, 7). Weiter bleibt die Gleichung **120** (d) gültig für jede geschlossene Fläche im äufseren Raume, wie nahe sie auch der Grenzfläche des wirkenden Körpers rückt. Wir schreiben sie

$$\text{(d)} \qquad \int (\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})_n \, d\sigma = \int \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma = \bar{E},$$

wo die totale Polintensität $\bar{E}$ innerhalb der Fläche durch Integration über allen kubischen und flächenhaften Aktionsdichten $\bar{e}$ und $\bar{e}'$ gefunden wird, also:

$$\text{(e)} \qquad \bar{E} = \int \bar{e}\, d\tau + \int \bar{e}'\, d\sigma'.$$

Ein ganz entsprechendes System von Formeln kann man für die Polarisation

$$\text{(f)} \qquad u = k\bar{u}, \quad v = k\bar{v}, \quad w = k\bar{w}$$

ableiten, welche sich nur um den konstanten Faktor $k$ von der Feldintensität unterscheidet. Wir schreiben von diesen Formeln besonders

$$\text{(g)} \qquad u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

$$\text{(h)} \qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \text{oder} \quad \nabla^2 \varphi = 0$$

$$\text{(i)} \qquad \int (u, v, w)_n \, d\sigma = \bar{E}$$

auf.

**127. Ausdehnung der Felder ins Innere der wirkenden Körper. —** Während die Ausdehnung der Felder bis zu der Grenzfläche einfach aus der einmal gewählten Definition der Feldvektoren in Verbindung mit dem erweiterten Superpositionsprinzipe folgte, kann

man zu der Betrachtung der Felder im Innern der wirkenden Körper nur durch neue induktive Verallgemeinerungen gelangen.

Dabei können wir uns durch verschiedene Betrachtungen leiten lassen. Zunächst versuchen wir das in formaler Beziehung Einfachste, nämlich eine Extrapolation, gestützt auf die rein formale mathematische Gültigkeit unserer Formeln auch im inneren Gebiete. Mathematisch betrachtet haben nämlich die Integrale **126** (b) auch hier eine Bedeutung und stellen ein Vektorfeld dar, dessen Eigenschaften wohl bekannt sind (vergl. I, **11**). Wir stellen daher die folgende Arbeitshypothese auf:

*Der von dem Potential* **126** (b) *dargestellte Vektor kann für die Beschreibung der Zustände oder Vorgänge auch im Innern des fernwirkenden Körpers verwertet werden.*

Das somit über den ganzen äufseren und inneren Raum ausgedehnte Feld hat die bekannten Eigenschaften, welche einem jeden durch das Potential **126** (b) dargestellten Vektorfelde zukommen. Wir bezeichnen im inneren Raume den Vektor mit $\bar{U}, \bar{V}, \bar{W}$, und den Wert seines durch das Integral **126** (b) gegebenen Potentials mit $\Phi$. Es ist dann:

$$\text{(a)} \qquad \bar{U} = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \qquad \bar{V} = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \qquad \bar{W} = \frac{\partial \Phi}{\partial z}.$$

Während der Vektor im äufseren Raume keine Divergenz hatte, und sein Potential folglich dort die Laplace'sche Gleichung erfüllte [**126** (c)], wird er im Innern eine Divergenz haben, welche gleich der im Integral **126** (b) vorkommenden freien Dichte $\bar{e}$ ist, und sein Potential erfüllt die Poisson'sche Gleichung. Also:

$$\text{(b)} \qquad \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{W}}{\partial z} = \bar{e} \quad \text{oder} \quad \nabla^2 \Phi = \bar{e}.$$

An der Grenzfläche ist die Differenz der normalen Vektorkomponenten gleich der freien Flächendichte $\bar{e}'$. Also, wenn sich die gestrichenen Buchstaben immer auf die Werte an der Grenzfläche beziehen, und $n$ die nach aufsen gerichtete Normale bedeutet:

$$\text{(c)} \qquad (\bar{u}', \bar{v}', \bar{w}')_n - (\bar{U}', \bar{V}', \bar{W}')_n = \bar{e}' \quad \text{oder} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \frac{\partial \Phi}{\partial n} = \bar{e}'.$$

Die tangentiellen Vektorkomponenten erfüllen dagegen die potentielle Grenzflächenbedingung:

$$\text{(d)} \qquad (\bar{U}', \bar{V}', \bar{W}')_t = (\bar{u}', \bar{v}', \bar{w}')_t \quad \text{oder} \quad \Phi' = \varphi'.$$

Nach Integration im Raume innerhalb einer geschlossenen Fläche ergiebt die Relation (b)

$$\text{(e)} \qquad \int (\bar{U}, \bar{V}, \bar{W})_n \, d\sigma = \bar{E},$$

wo $\bar{E}$ wieder nach **126** (e) durch Integration innerhalb der Fläche gefunden wird.

Genau ähnliche Formeln hätten wir für die Polarisation aufschreiben können. Diese entsteht aus der Feldintensität durch Multiplikation mit der Polarisierbarkeit $K$ des Körpers

$$\text{(f)} \qquad U = K\bar{U}, \qquad V = K\bar{V}, \qquad W = K\bar{W},$$

wobei zu erinnern ist, dafs wir $K = k$ voraussetzen. Solange wir uns aber nur mit dem Falle $K = k$, also nur mit e i n e m Medium beschäftigen, genügt die Betrachtung einer Vektorgröfse. Wir schreiben jedoch die den Gleichungen (b) und (e) entsprechenden Gleichungen

$$\text{(g)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x} + \dfrac{\partial V}{\partial y} + \dfrac{\partial W}{\partial z} = \acute{e} \\[2ex] \displaystyle\int (U, V, W)_n \, d\sigma = \hat{E} \end{cases}$$

auf, welche wegen des Gegensatzes in den Eigenschaften der freien und wahren Polintensitäten und Aktionsdichten besonders wichtig sind.

**128. Das Innere von Magneten oder von permanent polarelektrisierten Körpern.** — Mit diesen Resultaten ist die Frage nach den inneren Feldern in gewöhnlichen elektrisierten Körpern erledigt. Denn in solchen kann man die wahren Dichten $\acute{e}, \acute{e}'$ oder die freien $\bar{e}, \bar{e}'$ als primär gegebene Gröfsen ansehen. Wenn es sich um Magnete oder um permanent polarelektrisierte Körper handelt, wie die pyroelektrischen Krystalle, so sieht man die Aktionsdichten nur als Rechengröfsen an. Die freien Aktionsdichten sind nach **125** (c) die negativen Divergenzen der Aktionsintensität $(\mathfrak{f}, \mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, welche als fundamentaler Vektor denjenigen inneren Zustand oder Vorgang darstellt, auf welchem das Fernwirkungsvermögen beruht. **127** (b) und (c) in Verbindung mit **125** (c) geben also:

$$\text{(a)} \qquad \begin{cases} -\left\{\dfrac{\partial \mathfrak{f}}{\partial x} + \dfrac{\partial \mathfrak{g}}{\partial y} + \dfrac{\partial \mathfrak{h}}{\partial z}\right\} = \dfrac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \dfrac{\partial \bar{V}}{\partial y} + \dfrac{\partial \bar{W}}{\partial z} = \bar{e} \\[2ex] (\mathfrak{f}', \mathfrak{g}', \mathfrak{h}') = (\bar{u}', \bar{v}', \bar{w}')_n - (\bar{U}', \bar{V}', \bar{W}')_n = \bar{e}'. \end{cases}$$

Die zwei Vektorgrößen $(\bar{U}, \bar{V}, \bar{W})$ und $(\mathfrak{f}, \mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, die wir somit im Innern der Magnete kennen, sind, wie die Gleichungen (a) zeigen, von gleichen Dimensionen. Es ist deshalb erlaubt, durch Zusammensetzung wieder eine neue Vektorgröße zu bilden, welche wir auch versuchsweise als Repräsentant für Zustände oder Vorgänge im Innern des Magnets betrachten. Diesen Vektor

$$\text{(b)} \qquad \bar{U}_t = \bar{U} + \mathfrak{f}, \quad \bar{V}_t = \bar{V} + \mathfrak{g}, \quad \bar{W}_t = \bar{W} + \mathfrak{h}$$

können wir die totale Feldintensität nennen zum Unterschied von der Feldintensität $(\bar{U}, \bar{V}, \bar{W})$ schlechthin. Wir können dann das Vektorfeld betrachten, welches die totale Feldintensität $(\bar{U}_t, \bar{V}_t, \bar{W}_t)$ im inneren in Verbindung mit der Feldintensität $(\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w})$ im äußeren Raume bildet. Die Gleichungen (a) zeigen dann, daß dieses Vektorfeld im ganzen Raume divergenzfrei ist, so daß wir eine im ganzen Raume solenoidale Vektorgröße gefunden haben.

Dieselbe Eigenschaft wird der Vektor

$$\text{(c)} \qquad U = K\bar{U}_t, \quad V = K\bar{V}_t, \quad W = K\bar{W}_t$$

oder die Polarisation im inneren Raume haben, wenn wir sie in Verbindung mit der Polarisation 126 (f) im äußeren Raume betrachten. Und dieser Vektor wird, wie wir später sehen werden, die Solenoidaleigenschaft bewahren, wenn wir allgemeiner annehmen, daß $K$ nicht gleich $k$ ist, während dann die totale Feldintensität diese Eigenschaft verliert. Diesem Resultate vorausgreifend schreiben wir die weiteren Formeln nur für die Polarisation auf. Zur Vervollständigung des Schemas führen wir erst noch einen Vektor $(U_i, V_i, W_i)$ ein, die inducierte Polarisation, welche durch die Gleichungen

$$\text{(d)} \qquad U_i = K\bar{U}, \quad V_i = K\bar{V}, \quad W_i = K\bar{W}$$

definiert wird, die (c) entsprechen. Entsprechend (b) erhalten wir dann:

$$\text{(e)} \qquad U = U_i + \mathfrak{f}, \quad V = V_i + \mathfrak{g}, \quad W = W_i + \mathfrak{h}.$$

Der somit durch (c) in Verbindung mit (b), oder durch (e) in Verbindung mit (d) definierte Vektor erfüllt also im inneren Raume die Solenoidalbedingung

$$\text{(f)} \qquad \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0,$$

und an der Grenzfläche die solenoidale Grenzflächenbedingung

(g) $$(U, V, W)_n = (u, v, w)_n$$

und bildet daher mit $(u, v, w)$ zusammen ein solenoidales Gesamtfeld.

Wenn wir nach dieser verallgemeinerten Definition der Polarisation die Definition **127** (g) der wahren Dichte als Divergenz der Polarisation beibehalten, so sagt der Satz von der solenoidalen Natur der Polarisation aus, dafs wahre magnetische Massen nicht existieren. Dies stimmt mit der Auffassung überein, dafs ein Magnet nicht primär durch eine Synthese entgegengesetzter Pole entstanden ist. Die freie Dichte [**127** (b)] bleibt aber dennoch eine im Magnetismus wie in der Elektrostatik nützliche Rechengröfse.

Geht man aber von der totalen zu der inducierten Polarisation über, so hat man wieder einen Vektor mit Divergenzen, und diese Divergenzen sind fiktive Dichten

(h)
$$\begin{aligned} e_f &= \frac{\partial U_i}{\partial x} + \frac{\partial V_i}{\partial y} + \frac{\partial W_i}{\partial z} = -\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial h}{\partial z} \\ e'_f &= (u', v', w')_n - (U'_i, V'_i, W'_i)_n = (f, g, h)_n, \end{aligned}$$

welche die wahre Massenverteilung angeben würden, durch welche man sich bildlich den Magnet ersetzt denken könnte. Wenn man Formeln wie **125** (d) auf Magnete anwendet, so ist selbstverständlich $e$ als diese fiktive, der wahren in formalen Beziehungen gleichwertige Dichte aufzufassen.

Die Wichtigkeit dieser Unterscheidung tritt besonders deutlich hervor, wenn wir von den Magneten zu den permanent polarelektrisierten Körpern, wie den pyroelektrischen Krystallen, übergehen. Denn hier kann auch die totale Polarisation ein Divergenz haben:

(i)
$$\begin{aligned} e &= \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \\ e' &= (u', v', w')_n - (U', V', W')_n. \end{aligned}$$

Dies sind wahre Dichten, welche dem Krystall durch einen äufseren Elektrisierungsprozefs mitgeteilt und wieder entzogen werden können. Die Formeln (h) geben aber in Anwendung auf diese Körper fiktive Dichten, welche die Summe der wahren Dichten (i) und diejenigen nur in unserer Vorstellung existierenden Dichten sind, auf welche man bildlich den permanenten Polarisationszustand des Krystalls zurückführen kann.

**129. Ein anderer induktiver Weg zur Definition der Vektorgröfsen im inneren Raume.** — Wenn der Induktionsschlufs, durch den wir den Vektoren $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$ und $(u, v, w)$ im äufseren Raume eine reale physikalische Bedeutung beilegten, kühn war, so ist der neue, durch den wir $(\bar{U}, \bar{V}, \bar{W})$ und $(U, V, W)$ als Repräsentanten für reale Zustände und Vorgänge im inneren Raume einführen, noch kühner. Denn wir finden diese Gröfsen als das Resultat einer längeren Reihe von formalen Operationen, von denen man keiner eine klare, reale physikalische Bedeutung beilegen kann.

Man hat deshalb versucht, andere Wege zu finden, um, wenn möglich, in näherem Anschlufs an konkrete, wenn auch nicht ausführbare, so doch denkbare Versuche, die Definition der Vektoren $(\bar{U}, \bar{V}, \bar{W})$ und $(U, V, W)$ zu gewinnen. Man denkt sich dann einen kleinen Hohlraum im Innern des fernwirkenden Körpers ausgebohrt, bringt den Prüfpol $g$ in diesen Hohlraum, mifst die mechanische Kraft, welche er erleidet, definiert einen Vektor, indem man diese Kraft durch die Polintensität des Prüfpoles dividiert, und nimmt schliefslich induktiv an, dafs dieser durch formale Definition eingeführte Vektor die realen Zustände oder Vorgänge im Innern des fernwirkenden Körpers darstellt.

Es sei beiläufig bemerkt, dafs die formale Richtigkeit dieser Entwickelung ganz und gar auf dem erweiterten Superpositionsprinzipe (**124**) beruht. Denn nach diesem Prinzipe wird die Fernwirkung der den Hohlraum umgebenden Volumelemente durch das Entfernen des fernwirkenden Stoffes aus dem Hohlraume nicht beeinflufst. Es versteht sich dabei von selbst, dafs sich die „Ausbohrung" des Hohlraumes auf ein Entfernen nur des fernwirkenden Stoffes beschränkt, wonach der Hohlraum mit demselben Stoffe gefüllt wird, welcher den fernwirkenden Körper von aufsen umgiebt, und welcher nach der Voraussetzung (**124**) dieselbe ponderomotorische Aktivitätskonstante oder dieselbe Polarisierbarkeit wie der fernwirkende Stoff hat. Weiter beruht es auch ausschliefslich auf dem Superpositionsprinzipe, wenn das Einbringen des Prüfpoles in diesen Hohlraum auch nicht das Fernwirkungsvermögen der den Hohlraum umgebenden Volumelemente beeinflufst. Giebt man aber die Bedingungen auf, unter welchen das Superpositionsprinzip unbeschränkte Gültigkeit besitzt, so werden alle auf die Ausbohrung von Hohlräumen begründeten Überlegungen ganz illusorisch.

Diese Methode mit den Hohlräumen führt nun ganz einfach zu der Definition des Vektors $(\bar{U}, \bar{V}, \bar{W})$, wenn der Körper ein durch sein ganzes inneres elektrisiertes Dielektrikum ist. Denn die Kraft,

welche der Prüfpol im Hohlraume erleidet, zeigt sich von der Form des Hohlraumes unabhängig. Ganz eindeutig kommt man dann, wenn man die Definitionsgleichung **119** (a) beibehält, zu demselben Vektor $(\bar{U}, \bar{V}, \bar{W})$ wie oben [**127** (a)], welcher die potentielle Fortsetzung des Vektors $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$ bildet.

Im Innern eines Magnets hört dagegen die Eindeutigkeit auf. Die Kraft, welche der Pol erleidet, ist von der Form des Hohlraumes abhängig. Durch Willkür bevorzugt man zwei Formen, nämlich einen unendlich schmalen Kanal längs, und einen unendlich schmalen Spalt senkrecht zu der Magnetisierungsrichtung. Die Kraft, welche ein Prüfpol in dem Hohlraume der ersten Form erleidet, giebt nach Division mit der wahren Polintensität des Prüfpoles den Vektor $(\bar{U}, \bar{V}, \bar{W})$, also die Feldintensität im inneren Raume. Die Kraft, welche der Prüfpol in einem Hohlraume der zweiten Form erleidet, giebt nach Division mit der freien Polintensität des Prüfpoles den Vektor $(U, V, W)$, also die Polarisation im inneren Raume.

**130. Diskussion.** — Der letztere Weg zur Definition der Vektorgröfsen im Innern des Magnets mag vom physikalischen Standpunkte aus gewisse Vorzüge dem ersteren gegenüber haben. Denn formal gelingt es auf diesem Wege, die im äufseren Raume gewählte Definition **119** (a) beizubehalten. Solange man gezwungen ist, einen Hohlraum zu bilden, bleibt aber die mechanische Kraft, die man zu Grunde legt, eine Kraft im äufseren und nicht, wie es zu wünschen wäre, im wirklichen inneren Raume. Die Willkür bei der Bevorzugung gewisser Formen des Hohlraumes liegt auch auf der Hand. Das Resultat bleibt deshalb immer das, dafs man einer durch willkürliche formale Definition eingeführten Vektorgröfse gewaltthätig eine physikalische Bedeutung beilegt. Der Induktionsschlufs, den man dabei macht, bleibt ein noch gewagterer als der entsprechende, welcher zu der Definition des Vektors im äufseren Raume führte.

Was andererseits die nachträgliche Verifikation von Konsequenzen der aufgestellten Theorie betrifft, so besitzt man nur solche für die äufseren Räume. Denn die Hertz'schen Versuche berühren nicht das Innere von elektrisierten Körpern oder von Magneten. Die Zuversicht, dafs wir bei der Einführung eben dieser und nicht anderer Vektorgröfsen doch das Richtige getroffen haben, dürfte vor allem ihre Ursache in der einfachen und harmonisch abgerundeten Form haben, welche die Einführung eben dieser und nicht anderer

Vektorgrößen der Theorie der Felder verleiht, in Verbindung mit dem allgemeinen Glauben, daß das mathematisch Einfache auch physikalisch eine gewisse Wahrscheinlichkeit für sich hat.

Eben wegen dieser schwachen Begründung der Theorie der inneren Felder hat die Betrachtung des hydrodynamischen Bildes um so größeres Interesse. Die Analogie, wie wir sie bis jetzt kennen, läßt sich folgendermaßen zusammenfassen.

Pulsierende und oscillierende Kugeln in einer Flüssigkeit üben aus großen gegenseitigen Abständen Kraftwirkungen aufeinander aus, welche den Kraftwirkungen zwischen elektrisch geladenen Körpern oder zwischen Magneten entgegengesetzt gleich sind. Dabei entspricht Pulsationsintensität elektrischer Ladung oder magnetischer Polintensität, und das Aktionsmoment der oscillierenden Kugel entspricht dem magnetischen Momente des Magnets. An diese inverse Analogie der ausgeübten Fernkräfte schließt sich eine Analogie der Felder an, welche direkt ist. Die Felder lassen sich in beiden Fällen in derselben induktiven Weise aus der Fernwirkung auf einen Pol ableiten. Nur hat man, entsprechend der entgegengesetzten Kraftrichtung, im elektrischen oder magnetischen Falle mit der positiven, im hydrodynamischen mit der negativen Polintensität zu dividieren, um den Feldvektor zu bilden [**119** (a)]. Das hydrodynamische Feld, auf das wir in dieser Weise geführt werden, ist wirklich das Stromfeld, welches den Fernwirkungen zu Grunde liegt. Und in der Ausdehnung, in der wir die Felder schon kennen, nämlich in großen Abständen von den fernwirkenden Körpern, tritt eine vollkommene, und zwar direkte Analogie der hydrodynamischen Felder mit den elektrischen und magnetischen auf. Dabei entspricht die hydrodynamische Feldintensität dem gleichbenannten elektrischen oder magnetischen Vektor, und die Geschwindigkeit der Polarisation.

Unsere elektrischen und magnetischen Entwickelungen haben wir nun in der Weise weitergeführt, daß wir uns vorläufig auf den speziellen Fall beschränkten, wo die Körper dieselbe ponderomotorische Aktivitätskonstante wie das Medium haben. Dadurch erzielten wir den Vorteil, ein Superpositionsprinzip unbeschränkter Gültigkeit aufstellen zu können. Dieses Prinzip gestattete uns die beliebig vielen getrennten Körperchen zu Körpern endlicher Ausdehnung zusammenzusetzen, und das Feld mit Hilfe des Prüfpoles bis zu der Grenzfläche und selbst ins Innere dieses Körpers zu verfolgen.

Diese Entwickelung können wir nicht hydrodynamisch nachmachen, ehe wir ein hydrodynamisches Problem viel größerer All-

gemeinheit als das über Kugeln gelöst haben. Denn solange wir die Bedingung über die Kugelform festhalten, läfst sich kein unbeschränkt gültiges Superpositionsprinzip aufstellen. Wenn wir die Dichte der Kugeln gleich der der Flüssigkeit setzen, so verschwinden allerdings die am meisten hervortretenden derjenigen Kräfte, für welche das Superpositionsprinzip nicht gültig ist. Es bleibt aber die auf der Starrheit der Kugeln beruhende Kraft zurück, die wir gelegentlich erwähnt (**92**), aber sonst nicht genau studiert haben. Für diese Kraft gilt aber in der That auch kein Superpositionsprinzip. Die Wirkungen dieser Kraft treten allerdings erst bei grofser Annäherung der Kugeln mit störender Stärke auf. Ihre Existenz hindert uns aber, zuverlässige Schlüsse für den Fall zu ziehen, dafs die Abstände beliebig klein sind. Aufserdem ist es a priori unmöglich, einen stetig den Raum erfüllenden Körper durch Zusammenbringen von Kugeln zu bilden.

Man ersieht hieraus, dafs man erst ein aufserordentlich verallgemeinertes hydrodynamisches Problem lösen mufs, ehe man die Analogie der hydrodynamischen Erscheinungen zu den elektrischen und magnetischen in vollster Allgemeinheit sicher feststellen kann, und ehe es möglich sein wird, jeden einzelnen Induktionsschlufs, den man beim Aufbau der Theorie der elektrischen und magnetischen Erscheinungen macht, an dem hydrodynamischen Bilde der Erscheinungen zu prüfen.

Wir verzichten deshalb im folgenden auf die Untersuchung des hydrodynamischen Stromfeldes mit Hilfe eines als Prüfpol dienenden pulsierenden Kügelchens. Wir kehren zu den Stromfeldern zurück, so wie wir sie kennen nach unseren deduktiven Entwickelungen im ersten Bande, sowohl aufserhalb wie innerhalb einer einzigen pulsierenden oder oscillierenden Kugel, und werden diese Felder mit denjenigen einer einzigen elektrisierten oder magnetisierten Kugel vergleichen.

Indem wir somit zu Betrachtungen viel speziellerer Natur übergehen, fügen wir hinzu, dafs uns ein Weg doch offen stehen würde, um die Analogie der hydrodynamischen Erscheinungen zu den elektrischen und magnetischen scheinbar in unbeschränkter Allgemeinheit zu entwickeln. Dieser Weg ist der molekulartheoretische. Aus unseren Kugeln könnten wir in molekularer Weise Körper beliebiger Form bauen, und dabei die Bedingung über die verhältnismäfsig grofsen gegenseitigen Abstände zwischen den Kugeln festhalten. Dann bleibt das Superpositionsprinzip gültig, und alle Schlüsse, die man in der Lehre von Elektricität und Magnetismus

macht, können im hydrodynamischen Bilde nachgemacht und dann geprüft werden. Wenn wir diesen Weg trotzdem nicht einschlagen, so geschieht dies, weil wir dadurch nichts thatsächlich Neues über die Analogie lernen würden. Denn unser Ziel ist nicht, die elektrischen oder magnetischen Erscheinungen in möglichst grofser Ausdehnung künstlich nachzubilden, sondern vielmehr, nach Vermögen zu untersuchen, wie tief in der Natur der Dinge die Analogie begründet ist. Und darüber wird das vollständige Durchdiskutieren des einfachen Spezialfalles mit einer einzigen Kugel mehr Aufschlufs geben, als die Betrachtung der allgemeinsten durch kugelförmige Moleküle gebildeten Körper.

Der Kürze halber betrachten wir dieses Mal nur den Fall der oscillierenden oder translatorisch bewegten Kugel. Die Diskussion des absolut einfachen Falles der pulsierenden Kugel schieben wir auf, bis wir allgemeiner verschiedene Dichten der Kugel und der Flüssigkeit voraussetzen können (138).

**131. Geschwindigkeit und Polarisation bei der translatorisch bewegten Kugel und bei dem kugelförmigen Magnet.** — Anstatt den dauernden Oscillationszustand der Kugel zu betrachten, wollen wir der gröfseren Anschaulichkeit halber nur einen momentanen Bewegungszustand ins Auge fassen. Wir gewinnen dadurch den Vorteil, einfach mit den Geschwindigkeiten, anstatt mit ihren quadratischen Mittelwerten zu schaffen zu haben. Der nachträgliche Übergang zu Oscillationen und quadratischen Mittelwerten erfolgt in der gewöhnlichen Weise, und bietet keine Schwierigkeit dar.

Es seien eine translatorisch bewegte und eine homogen magnetisierte Kugel gegeben. Die erste soll dieselbe Dichte oder dieselbe Beweglichkeit wie die umgebende Flüssigkeit, die zweite dieselbe ponderomotorische Aktivitätskonstante oder dieselbe Polarisierbarkeit wie das umgebende Medium haben. Beide umgeben sich mit Feldern. Auf das Verfolgen beider Felder von aufsen nach innen unter Anwendung von Prüfpolen verzichten wir aus den angegebenen Gründen und betrachten anstatt dessen das magnetische Feld, wie es fertig vorliegt auf Grundlage der entwickelten induktiven Theorie, und andererseits das hydrodynamische Feld, so wie wir es nach unseren deduktiven Entwickelungen im ersten Bande kennen. Und zwar fangen wir dabei mit demjenigen Felde an, dem wir als dem letzten Resultate der induktiven Entwickelung begegneten, nämlich dem Polarisationsfeld im Innern des Magnets, und mit dem entsprechenden Felde, welches bei unseren deduktiven Entwickelungen

als das **erste** gegeben war, nämlich dem Geschwindigkeitsfelde im Innern der bewegten Kugel.

Es seien demnach die von Punkt zu Punkt an Richtung und Gröſse konstante Geschwindigkeit $(U, V, W)$ im Innern einer translatorisch bewegten Kugel, und entsprechend die von Punkt zu Punkt an Richtung und Gröſse konstante Polarisation innerhalb einer homogen magnetisierten Kugel gegeben. Beide Vektoren haben dann im innern Raume identisch dieselbe geometrische Verteilung, und es ist besonders hervorzuheben, daſs beide die Solenoidalbedingung [**128** (f)]

(a) $$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0$$

erfüllen.

Die bewegte Kugel erzwingt nun in der umgebenden Flüssigkeit ein Geschwindigkeitsfeld, und die polarisierte Kugel umgiebt sich mit einem Polarisationsfeld. Diese äuſseren Felder sind in beiden Fällen durch die folgenden Bedingungen bestimmt. Der Vektor $(u, v, w)$ im äuſseren Raume bildet an der Grenzfläche die solenoidale Fortsetzung des inneren Feldes [I, **13** (b); II, **128** (g)]:

(b) $$(u, v, w)_n = (U, V, W)_n .$$

Im äuſseren Raume erfüllen beide die Solenoidalbedingung [I, S. 21, **15** (a); II, **126** (h)] und beide die Potentialbedingung [I, S. 22, **15** (a); II, **126** (g)]. Also:

(c) $$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

wo [I, S. 22, **15** (b); II, **126** (h)]

(d) $$\nabla^2 \varphi = 0.$$

Diese Bedingungen in Verbindung mit der Annahme, daſs die Vektoren in unendlicher Ferne verschwinden, bestimmen die Felder eindeutig, und es ist damit erwiesen, daſs die Übereinstimmung des Geschwindigkeits- und des Polarisationsfeldes im Innern die Übereinstimmung der anschlieſsenden Geschwindigkeits- und Polarisationsfelder im äuſseren Raume zur Folge hat. Die Figur 55, welche uns früher die Geschwindigkeitsverteilung innerhalb und auſserhalb der bewegten Kugel darstellte, giebt also gleichzeitig das Bild der räumlichen Verteilung der Polarisation auſserhalb und innerhalb des kugelförmigen Magnets.

Der Beweis ist ganz allgemein und nicht im geringsten von der beschränkenden Voraussetzung über die Kugelform des Körpers abhängig. Die Analogie zwischen Polarisation und Geschwindigkeit ist auch schon längst in ihrer ganzen Ausdehnung bekannt. Dafs man sie so leicht in ihrem vollen Umfange beweisen kann, beruht darauf, dafs das Stromfeld, welches der Körper durch seine Bewegung in der Flüssigkeit erzeugt, schon durch die kinematischen Bedingungen eindeutig bestimmt ist, so dafs man nicht zu tieferen Studien über die Dynamik der Flüssigkeiten zu greifen braucht.

Diese schon längst bekannte Analogie tritt aber jetzt insofern in neuem Zusammenhange auf, als sie erstens die inverse dynamische Analogie als Hintergrund hat, und zweitens sich in einer

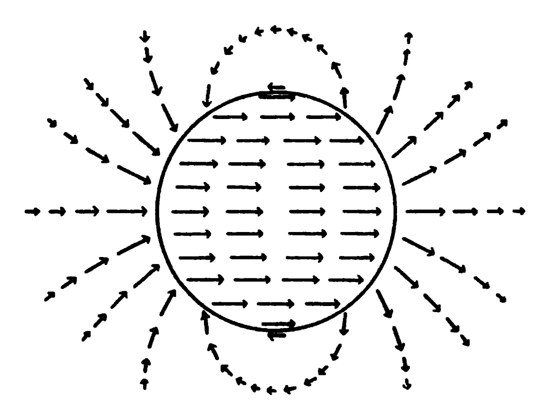


Fig. 55. Äufseres und inneres Polarisationsfeld einer homogen magnetisierten Kugel. Äufseres und inneres Geschwindigkeitsfeld einer durch eine Flüssigkeit fortschreitenden Kugel.

Analogie zwischen hydrodynamischer und magnetischer Feldintensität fortsetzt. Diese Fortsetzung beruht aber auf speziellen dynamischen Resultaten, und die Beschränkung auf die Kugelform bleibt solange wesentlich, bis es gelungen ist, dynamische Aufgaben weit allgemeinerer Natur zu lösen.

**132. Die Feldintensität bei der translatorisch bewegten Kugel und bei dem kugelförmigen Magnet.** — Von der Polarisation beziehungsweise der Geschwindigkeit $(u, v, w)$ im äufseren Raume geht man durch Multiplikation mit der ponderomotorischen Aktivitätskonstante $q$ zu der Feldintensität $(\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w})$ über [I, 13; II, 126 (f)]:

$$\text{(a)} \qquad \mathfrak{u} = q\,u, \quad \mathfrak{v} = q\,v, \quad \mathfrak{w} = q\,w.$$

Dabei ist zu erinnern, dafs im hydrodynamischen Falle die ponderomotorische Aktivitätskonstante dasselbe wie die Dichte der Flüssigkeit ist. Die hydrodynamische Feldintensität wird also identisch mit der Bewegungsgröfse pro Volumeinheit der Flüssigkeit; oder aber, wenn man auf die dynamische Bedeutung der Bewegungsgröfse zurückgreift: die hydrodynamische Feldintensität ist der Impuls pro Volumeinheit, welcher die Bewegung im Stromfelde erzeugt hat. Dieser hydrodynamische Vektor ist dann im äufseren Raume der magnetischen Feldintensität analog, wie es aus den Gleichungen (a) in Verbindung mit der allgemeinen Analogie zwischen Polarisation und Geschwindigkeit folgt. Die hydrodynamische wie die magnetische Feldintensität sind folglich auch potentielle Vektoren [I, **100**, **101**; II, **126** (a)]:

$$\text{(b)} \qquad \bar{u} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad \bar{v} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \qquad \bar{w} = \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Nachdem somit die Feldintensität im äufseren Raume bekannt ist, bilden wir die potentielle Fortsetzung dieses Vektors im inneren Raume. Das heifst wir bilden einen Vektor $(\bar{U}, \bar{V}, \bar{W})$, welcher von einem Potential $\Phi$ abhängt [I, **100**, **101**; II, **127** (a)]

$$\text{(c)} \qquad \bar{U} = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \qquad \bar{V} = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \qquad \bar{W} = \frac{\partial \Phi}{\partial z},$$

und welcher an der Grenzfläche die potentielle Grenzflächenbedingung [I, **100** (b); II, **127** (d)]

$$\text{(d)} \qquad (\bar{U}, \bar{V}, \bar{W})_t = (\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})_t \qquad \text{oder} \qquad \Phi' = \varphi'$$

erfüllt. Schliefslich soll dieser Vektor im inneren Raume gegebene Divergenzen haben, welche jedoch im vorliegenden Falle der homogen magnetisierten oder der fortschreitenden Kugel gleich Null sind.

Der Vektor $(\bar{U}, \bar{V}, \bar{W})$ ist durch diese Bedingungen eindeutig bestimmt, und stellt magnetisch nach dem eben Entwickelten (**127**) die Feldintensität im inneren Raume dar. Er hat aber auch eine einfache hydrodynamische Bedeutung, und wir sind auf ihn durch rein dynamische Studien gestofsen, unabhängig von jedem Suchen nach Analogien mit dem Magnetismus (I, **94**, **100**, **101**). Wir haben ihn die hydrodynamische Feldintensität im inneren Raume genannt, und diese stellt den auf die Einheit des Volumens bezogenen Impuls dar, welchen die Kugel, während ihrer Bewegung durch die Flüssigkeit, von seiten der Flüssigkeit erleidet.

Die Analogie ist durch die Figur 56 illustriert, und der Vergleich dieser Figur mit der Figur 55 ist besonders lehrreich. Im äufseren Raume ist die magnetische Polarisation der Feldintensität gleichgerichtet, wie im hydrodynamischen Falle die Geschwindigkeit dem Impulse gleichgerichtet ist, durch welchen sie erzeugt ist. Im inneren Raume haben dagegen Polarisation und magnetische Feldintensitat entgegengesetzte Richtungen. Denn hier stellen nicht jeder Vektor für sich, sondern erst beide zusammen den vollständigen Zustand oder Vorgang dar. Die Polarisation beziehungsweise die Geschwindigkeit giebt das innere Feld so wie es als Ganzes vorliegt, ohne Rücksicht darauf, durch welche verschiedenartige Wirkungen es entstanden ist. Die Feldintensität giebt dagegen ein auf

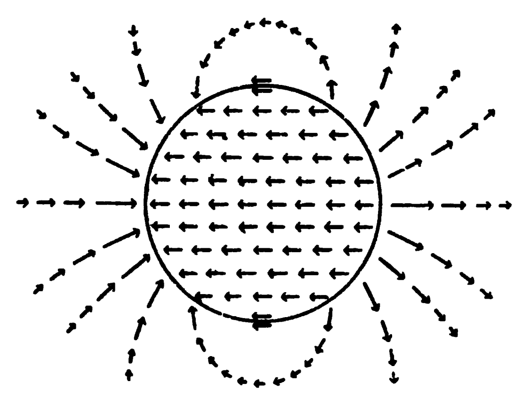


Fig. 56. **Feldintensitätsfeld einer homogen magnetisierten Kugel beziehungsweise einer durch eine Flüssigkeit fortschreitenden Kugel.**

eine bestimmte Ursache zurückführbares Partialfeld. Das Feld im äufseren Raume kann als das Resultat der Wirkung der magnetisierten beziehungsweise der bewegten Kugel auf das umgebende Medium betrachtet werden. Das Feldintensitätsfeld im inneren Raume ist das Resultat der Gegenwirkung des Mediums gegen die Kugel.

Mit dieser absoluten Analogie der Polarisation mit der Geschwindigkeit, und der magnetischen Feldintensität mit der hydrodynamischen folgt auch die Analogie aller Gröfsen, welche man aus diesen Gröfsen ableiten kann, wie die Aktionsdichten und die Aktionsintensitäten. Sie gehören jedoch alle mehr oder weniger in die Kategorie der Rechengröfsen, und wir werden sie erst unten genauer erwähnen, wenn wir uns mit dem allgemeinsten Falle beschäftigen.

# Fünfter Abschnitt.

## Die Felder in heterogenen Medien.

**133. Zur Entwickelung der Theorie der heterogenen Medien.** — Bis jetzt haben wir die Theorie der elektrischen oder magnetischen Felder nach einem einfachen einheitlichen Plane entwickeln können. Erst wurden die Fernwirkungsformeln, welche der Ausdruck direkt beobachtbarer Thatsachen sind, aufgestellt; nachher wurde die Vorstellung von Feldern, die diesen Thatsachen zu Grunde liegen, eingeführt und durch einen Induktionsschlufs die Vektorgröfsen dieser Felder durch die mechanische Kraft definiert, welche ein Pol erleidet. Wenn es möglich gewesen ist, diesen Weg zu gehen, so beruht dies ausschliefslich auf dem Superpositionsprinzipe. Dieses Prinzip in seiner ersten Form (**106**) machte es möglich, von der Wechselwirkung zweier Pole zu der Wechselwirkung beliebig vieler Pole und Polpaare in grofsen gegenseitigen Entfernungen überzugehen. In seiner zweiten, verallgemeinerten Form (**124**) machte es uns das Prinzip möglich, aus den beliebig vielen, aber ursprünglich weit voneinander getrennten, fernwirkenden Körperchen Körper endlicher Ausdehnung, welche den Raum stetig erfüllen, zusammenzusetzen, und dadurch die Formeln für die Fernwirkungen solcher Körper zu finden. Schliefslich konnten wir auch, dank diesem Prinzipe, sogar Formeln für die Kräfte aufstellen, welche ein Pol erleidet, wenn man ihn in einen im Innern des fernwirkenden Körpers ausgebohrten Hohlraum hineinbringt.

Ganz anders gestaltet sich aber die Sache, sobald wir zu den allgemeinsten Erscheinungen übergehen, wo das Superpositionsprinzip nicht mehr gültig ist. Die Erscheinungen sind dann so kompliciert, dafs es bis jetzt nicht gelungen ist, auf Grundlage der unmittelbaren Beobachtung der Fernkräfte Formeln für sie aufzustellen. Anstatt die beobachteten Erscheinungen selbst zu Grunde zu legen, hat man eine hypothetische Interpretation dieser Erscheinungen als Ausgangspunkt nehmen müssen. Auf diesem Umwege ist es zuerst Poisson gelungen, Formeln zu entwickeln, welche die beobachteten Erscheinungen wiedergeben.

Diese Poisson'sche Theorie war in historischer Beziehung der erste Schritt zur Entwickelung der Feldtheorie. Denn durch sie wurde die Betrachtung von Feldern nicht nur im mathematischen, sondern auch im physikalischen Sinne des Wortes eingeführt. Poisson selbst betrachtete solche Felder nur im Innern der permanenten

Magnete und der temporär magnetisierten Eisenstücke. Aber damit war der Weg betreten, welcher früher oder später zu der Betrachtung von Feldern im ganzen Raume führen mufste. Im übrigen ist aber die POISSON'sche Theorie ganz und gar im Geiste der Fernwirkungslehre ersonnen, und gehört nicht mehr in eine Darstellung, wo schon die Fernwirkungsvorstellungen verworfen sind und die Feldtheorie zu Grunde gelegt ist.

Mifsverständnisse über diesen Punkt haben oft zu logischen Fehlern bei dem induktiven Aufbau der Theorie der elektrischen und magnetischen Erscheinungen geführt. POISSON konnte als selbstverständlich voraussetzen, dafs der Vektor, welchen er magnetische Kraft nannte, und welchen wir als die magnetische Feldintensität bezeichnen, immer eine potentielle Vektorgröfse blieb. Er war dazu berechtigt, weil er sich diese Kraft als von den fernwirkenden Polen herrührend dachte, deren Wirkungen umgekehrt quadratisch abnahmen und sich ungestört durch die Materie wie durch den leeren Raum fortpflanzten. Jetzt sehen wir dagegen denselben Vektor als Repräsentant irgend eines physikalischen Zustandes der raumerfüllenden Materie an. Und wenn wir bewiesen haben, dafs er potentiell ist, solange die Materie homogen ist, so folgt daraus keineswegs, dafs er potentiell bleibt, wenn die Materie heterogen ist. Im Gegenteil, dies wird einer der Hauptpunkte, welche bewiesen werden müssen, und es wäre ein logischer Fehler, dies als den ersten selbstverständlichen Ausgangspunkt aufzustellen.

In einer modernen Darstellung der Elektricitätslehre wird deshalb die POISSON'sche Theorie überhaupt nur dann ihren Platz behaupten, wenn man die systematische Darstellung an die historische Entwickelung anlehnt, und den Übergang von den Fernwirkungsvorstellungen zu den Feldvorstellungen erst vornimmt, nachdem man die POISSON'sche Theorie entwickelt hat. Dagegen mufs man andere Wege suchen, wenn man schon von Anfang an die Fernwirkungsvorstellung verworfen und die Feldvorstellung als Arbeitshypothese eingeführt hat. Was man dann induktiv verallgemeinern darf, sind nicht mehr die Fernwirkungsgesetze, sondern die Gesetze, welche die inneren Eigenschaften der Felder angeben. Solche Gesetze, welche man für unbegrenzte homogene Medien gültig befunden hat, wird man versuchsweise innerhalb homogener Teile des heterogenen Mediums in Anwendung bringen dürfen.

**134. Definition der Feldintensität heterogener Medien.** — Bevor wir die Theorie der heterogenen Medien angreifen, müssen wir erst

einleitend untersuchen, inwieweit die in vollständig homogenen Medien zu Grunde gelegten Definitionen der Feldintensität noch brauchbar sind. Es zeigt sich, daſs dies nicht ohne weiteres der Fall ist. Denn wenn man im heterogenen Medium den Prüfpol $\acute{E}$ von Punkt zu Punkt führt, und einen Vektor registriert, welcher nach 119 (a) durch den Quotient der mechanischen Kraft durch die Polintensität gegeben ist, so findet man verschiedene Vektorfelder, je nach der Polintensität $\acute{E}$ des Prüfpoles. Diese Vieldeutigkeit beruht auf der influencierenden Wirkung, welche der Prüfpol selbst auf die Umgebung ausübt. Eindeutigkeit erreicht man erst wieder, wenn man die Polintensität $\acute{E}$ des Prüfpoles gegen Null konvergieren läſst. Diese Eindeutigkeit benutzen wir daher, um die folgende Definition aufzustellen:

*Die Feldintensität im heterogenen Felde ist die Grenze des Verhältnisses zwischen der Kraft, welche ein Prüfpol erleidet, und der wahren Polintensität dieses Prüfpoles, wenn diese Polintensität gegen Null konvergiert.*

Diese Definition ist selbstverständlich auch im homogenen Medium brauchbar, und kann die alte 119 (a) vollständig ersetzen.

**135. Die potentielle Natur der Feldintensität.** — Einen effektiven Gebrauch von der Definition der Feldintensität können wir wie früher nur in gasförmigen oder flüssigen Medien machen. Denn nur in solchen kann der Prüfpol von Stelle zu Stelle verschoben, und die zu der Definition dienende Kraft wirklich gemessen werden.

Für das Feld in solchen Körpern läſst sich also gleich eine allgemeine Eigenschaft mit Hilfe des Prinzipes von der Erhaltung der Energie ableiten. Wenn der Pol in einer beliebig geschlossenen Bahn herumgeführt wird, so erfordert das Prinzip von der Erhaltung der Energie, daſs das Linienintegral der Kraft identisch gleich Null wird. Dies muſs immer gelten, wie groſs oder wie klein die Polintensität auch sei, also auch im Grenzfalle der unendlich kleinen Polintensität. Wenn wir also durch Division der unendlich kleinen Kraft mit der unendlich kleinen Polintensität die Feldintensität bilden, so folgt, daſs das Linienintegral dieses Vektors für jede geschlossene Bahn gleich Null sein muſs. Mit anderen Worten, die Feldintensität muſs im ganzen Raume eine potentielle Vektorgröſse sein.

Diese Eigenschaft ist zunächst nur für die Felder in flüssigen und gasförmigen Medien ohne weiteres ableitbar. Da sich aber

sonst in elektrischer und magnetischer Beziehung kein prinzipieller Unterschied zwischen den flüssigen Medien und den festen zeigt, so sind wir berechtigt, diese Eigenschaft induktiv auch auf Felder, welche feste Medien enthalten, zu übertragen.

Mit dem allgemeinsten Falle der Heterogenität, wo die Polarisierbarkeit $k$ in allgemeinster Weise ihren Wert von Punkt zu Punkt stetig oder unstetig verändern kann, werden wir uns nicht beschäftigen. Wir beschränken uns auf den einfachsten Fall, daſs das heterogene Medium aus homogenen Teilen zusammengesetzt ist. Das äuſsere unbegrenzte Medium kann die Polarisierbarkeit $k$, und ein beliebiger Körper die Polarisierbarkeit $K$ haben, wo $k$ und $K$ von Punkt zu Punkt konstant sind, während nur an der Grenzfläche ein plötzlicher Sprung der Polarisierbarkeit von $k$ auf $K$ stattfindet. Die inneren Gesetze der Felder in den einzelnen homogenen Teilen des heterogenen Feldes sind uns dann aus dem früheren Studium der vollständig homogenen Felder bekannt, und das Neue, welches wir zu suchen haben, sind nur die Bedingungen, welche an der Unstetigkeitsfläche erfüllt werden. Das gefundene allgemeine Resultat, daſs die Feldintensität im ganzen Felde eine potentielle Vektorgröſse sein muſs, enthält dann als neu hinzugekommenes Resultat einfach, daſs die Feldintensität an der Grenzfläche die potentielle Grenzflächenbedingung erfüllen muſs. Oder mit anderen Worten (I, 9):

*Die Feldintensität geht mit stetiger Tangentialkomponente durch die Grenzfläche zweier Medien hindurch:*

(a) $$(\bar{U}, \bar{V}, \bar{W})_t = (\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})_t \quad \text{oder} \quad \varphi' = \Phi'.$$

**136. Die Solenoidaleigenschaft der Polarisation.** — Nichts hindert uns im heterogenen Felde wie im homogenen aus der Feldintensität durch Multiplikation mit der Polarisierbarkeit $k$ oder $K$ eine neue Vektorgröſse, die Polarisation, zu bilden. Zu einer Eigenschaft dieses Vektors in heterogenen Medien führt die induktiv-verallgemeinernde Interpretation der Erfahrungsthatsache über die Unveränderlichkeit der wahren Polintensitäten. Denn diese können ihre Werte nur durch irgend einen Elektrisierungs- oder Magnetisierungsprozeſs verändern. Die Überführung der geladenen Körper oder der Pole von einem isolierenden Medium zu einem anderen veränderte die Verhältniszahlen $n$ nicht [107 (c)], und folglich auch nicht die durch diese Verhältniszahlen definierten wahren Polintensitäten $\bar{E}$. Wenn es sich um vollständig homogene Medien

handelt, so wissen wir also schon, daſs ein und dasselbe System von Polen mit seinen unveränderlichen wahren Polintensitäten ein und dasselbe Polarisationsfeld erzeugt, ganz abgesehen von der Polarisierbarkeit des Mediums.

Die neue Frage, welche wir zu beantworten haben, ist aber die, wie sich die Polarisation verhält, wenn zwei Medien auf einmal vorhanden sind. Wir sind berechtigt, induktiv-verallgemeinernd anzunehmen, daſs die inneren Eigenschaften, die wir für Felder in unbegrenzten homogenen Medien gefunden haben, auch innerhalb jedes homogenen Teiles des heterogenen Mediums angewendet werden dürfen. Um die Frage beantworten zu können, brauchen wir aber jedenfalls eine neue Erfahrung, welche sich auf den Fall bezieht, daſs zwei Medien auf einmal vorhanden sind. Nun beziehen sich die oben angedeuteten Versuche thatsächlich schon auf diesen Fall, da wir in der Praxis über kein unbegrenztes homogenes Medium verfügen. Der Deutlichkeit halber stellen wir aber den folgenden neuen Versuch dem alten an die Seite.

Zwei Pole $\dot{E}_g$ und $\dot{E}_h$ befinden sich in groſser Entfernung voneinander in einem homogenen Medium 1, welches die Polarisierbarkeit $k$ hat. In die Nähe von $\dot{E}_h$ bringen wir einen Körper 2 von der Polarisierbarkeit $K$. Nur soll dieser Körper sehr klein im Verhältnis zu dem Abstande zwischen den Polen sein. Die Anwesenheit dieses Körpers in der Nähe von $h$ ändert dann nicht im geringsten die Kraft, welche $g$ erleidet, nicht einmal, wenn der Körper den Pol $h$ ganz umgiebt, so daſs sich dieser Pol nicht mehr im Medium 1, sondern im Medium 2 befindet.

Wir können jetzt die für homogene Medien gefundenen Gesetze auf jeden homogenen Teil 1 und 2 des heterogenen Mediums in Anwendung bringen. Befindet sich der Pol im Medium 2, so ergiebt die Formel **126** (i) oder **127** (g) sofort, daſs der Polarisationsfluſs durch eine Fläche, welche in diesem Medium verläuft und den Pol umgiebt, gleich $\dot{E}_h$ ist. Der angegebene Versuch zeigt aber andererseits, daſs die Polarisation im äuſseren Medium, in sehr groſser Entfernung von dem Körper $h$, dieselbe ist, als ob der Körper 2 nicht vorhanden wäre. Eine Fläche, welche in groſsem Abstande von $h$ das System umgiebt, wird also auch von dem Polarisationsfluſs $\dot{E}_h$ durchsetzt. Jetzt können wir die Flächen deformieren. Wegen der Solenoidaleigenschaft der Polarisation in jedem homogenen Teile des heterogenen Feldes wird der Vektorfluſs dadurch nicht beeinfluſst werden. Die Fläche im Medium 2 möge sich ausdehnen, bis sie mit der Grenzfläche in Berührung kommt; sie

wird dabei fortwährend von dem Polarisationsflufs $\dot{E}_h$ durchsetzt. Die Fläche im Medium 1 möge sich zusammenziehen, bis sie mit der Grenzfläche des Körpers 2 in Berührung kommt. Wieviel nun auch das Vorhandensein des Körpers 2 das ursprüngliche Feld im Medium 1 verändert hat (nur in hinlänglich grofser Entfernung waren die Veränderungen unmerkbar), so folgt aus der Solenoidaleigenschaft, dafs der Polarisationsflufs immer den Wert $\dot{E}_h$ beibehält. An der Grenzfläche erhalten wir deshalb die Relation

$$\int (u, v, w)_n \, d\sigma = \int (U, V, W)_n \, d\sigma,$$

wo wie gewöhnlich $(u, v, w)_n$ die Normalkomponente der Polarisation aufserhalb, $(U, V, W)_n$ die Normalkomponente der Polarisation innerhalb der Grenzfläche darstellen.

Diese Gleichung giebt noch keine eindeutige Relation zwischen den Normalkomponenten. Die einfachste Lösung ist aber, dafs der Vektor die solenoidale Grenzflächenbedingung erfüllt,

$$\text{(a)} \qquad (u, v, w)_n = (U, V, W)_n,$$

und hierauf gestützt, nehmen wir das folgende Gesetz induktiv an:

*Die Polarisation geht mit stetiger Normalkomponente durch die Grenzflächen zweier Medien hindurch.*

Die Ableitung bezieht sich nur auf den Fall, wo keine permanente Polarisation vorliegt. Wenn wir das Gesetz auch in diesem allgemeinsten Falle induktiv anwenden, wo man mehrere Gröfsen von Polarisationsnatur definieren kann (**128**), so legen wir selbstverständlich diese Eigenschaft der totalen Polarisation bei, welche schon im homogenen Felde die Solenoidaleigenschaft besafs.

**137. Die Feldgleichungen für das heterogene Medium.** — Die Gleichungen **135** (a) und **136** (a) sind mit **127** (d) und **128** (g) identisch. Die übrigen Gleichungen, die wir aufzuschreiben haben würden, sind auch dieselben, die schon in **126**, **127**, **128** aufgestellt worden sind, nur dafs wir nicht mehr wie damals $K$ gleich $k$ voraussetzen. Nur eine Formel mufs, wie wir bald sehen werden, in andererForm geschrieben werden.

Natürlich hätten wir für das homogene Medium eine ganze Reihe von Formeln aufschreiben können, die für das heterogene ihre Gültigkeit verloren hätten. In dem homogenen Medium hatte

beispielsweise die totale Feldintensität (das heifst $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ im äufseren Raume in Verbindung mit $U_t, \bar{V}_t, \bar{W}_t$ im inneren) genau dieselbe Solenoidaleigenschaft wie die Polarisation. Und gleichfalls hatte die inducierte Polarisation (das heifst $u, v, w$ im äufseren Raume in Verbindung mit $U_i, V_i, W_i$ im inneren) dieselbe Potentialeigenschaft wie die Feldintensität. Nach der Verallgemeinerung haben aber nur die Vektorgröfse, die wir als Feldintensität ohne Beiwort bezeichnen, die Potentialeigenschaft, und nur die Vektorgröfse, die wir als Polarisation ohne Beiwort bezeichnen, die Solenoidaleigenschaft beibehalten, und dadurch sind diese Vektoren als die Fundamentalvektoren hervorgetreten. Mit der Kenntnis der späteren Verallgemeinerungen haben wir bei der Behandlung der homogenen Medien nur die Formeln aufgeschrieben, die sich auch bei dem Übergange zu den heterogenen Medien bewähren.

Dabei ist jedoch eine Ausnahme hervorzuheben. Definitionsmäfsig können wir festhalten, dafs ein Vektor, welchen wir die **totale Feldintensität** nennen wollen, durch die Polarisation mittels der Gleichungen

$$\text{(a)} \qquad U = K\bar{U}_t, \qquad V = K\bar{V}_t, \qquad W = K\bar{W}_t,$$

und ebenfalls, dafs ein Vektor, die **inducierte Polarisation**, durch die Feldintensität mittels der Gleichungen

$$\text{(b)} \qquad U_i = K\bar{U}, \qquad V_i = K\bar{V}, \qquad W_i = K\bar{W}$$

gegeben sein soll. Dann können wir weiter, entspechend den Gleichungen **128** (b) und (e) die Relationen

$$\text{(c)} \qquad U = U_i + U_e, \qquad V = V_i + V_e, \qquad W = W_i + W_e$$

und

$$\text{(d)} \qquad \bar{U}_t = \bar{U} + \bar{U}_e, \qquad \bar{V}_t = \bar{V} + \bar{V}_e, \qquad \bar{W}_t = \bar{W} + \bar{W}_e$$

aufschreiben. Diese Gleichungen definieren zwei neue Vektoren, die **energetische Polarisation** $(U_e, V_e, W_e)$ und die **energetische Feldintensität** $(\bar{U}_e, \bar{V}_e, \bar{W}_e)$. Erst eine genaue Diskussion läfst entscheiden, ob wir diese Vektoren mit den in den Gleichungen **128** (b) und (e) auftretenden Aktionsmomenten $(f, g, h)$ und $(\bar{f}, \bar{g}, \bar{h})$ identificieren dürfen.

Dies führt nun auf keinen Widerspruch, wenn es sich um die energetische Polarisation $(U_e, V_e, W_e)$ und die wahre Aktionintensität $(f, g, h)$ handelt. Denn $(f, g, h)$ hat nach **128** (h) die Fundamental-

eigenschaft, daſs ihre negative Divergenz die fiktiven Dichten $\acute{e}_f$ und $\acute{e}_f'$ giebt, und dieselbe Eigenschaft hat $(U_e, V_e, W_e)$, wie man gleich sieht, indem man die Divergenz von (c) bildet und sich der solenoidalen Natur von $(U, V, W)$ erinnert. Ihren praktischen Nutzen als Rechengröſsen haben aber $(f, g, h)$ und $(U_e, V_e, W_e)$ unter diesen neuen Verhältnissen verloren, weil die inducierte Polarisation kein Potential mehr hat.

Dagegen kann man $(\bar{U}_e, \bar{V}_e, \bar{W}_e)$ nicht mehr mit $(f, g, h)$ identificieren. Denn $(\bar{U}_e, \bar{V}_e, \bar{W}_e)$ kann nicht die Relationen **128** (a) erfüllen. Die freie Aktionsintensität ist unter den allgemeineren Verhältnissen ein Vektor für sich, welcher aus den Gleichungen **128** (a) zu bestimmen ist, und muſs von demjenigen Vektor $(\bar{U}_e, \bar{V}_e, \bar{W}_e)$ wohl getrennt werden, welcher durch Zusammensetzung mit der Feldintensität $(\bar{U}, \bar{V}, \bar{W})$ die totale Feldintensität giebt.

Das Gleichungssystem für die heterogenen Medien bleibt also das in **126**, **127**, **128** aufgeschriebene, nur daſs man **128** (b) durch **137** (d) ersetzt, und im übrigen nicht mehr die specialisierende Voraussetzung $K$ gleich $k$ macht.

**138. Eine volumändernde und eine homogen elektrisierte Kugel.** — Indem wir zu den einzelnen Fällen übergehen, wo sich der Vergleich mit den hydrodynamischen Erscheinungen durchführen läſst, fangen wir mit einer volumändernden und einer durch ihr ganzes Innere homogen elektrisierten Kugel an. Dabei gehen wir wieder am bequemsten von der Annahme aus, daſs das Geschwindigkeits- oder das Polarisationsfeld im Innern der Kugel gegeben ist.

Die Geschwindigkeit beziehungsweise die Polarisation sei im Innern der Kugel radial gerichtet, und an Gröſse proportional dem Abstande vom Mittelpunkte. Die Divergenz $\acute{e}$ dieses Vektors hat dann in allen Punkten innerhalb der Kugel denselben konstanten Wert (I, 18), und stellt im elektrischen Falle die wahre kubische Dichte, im hydrodynamischen die kubische Ausdehnungsgeschwindigkeit pro Volumeinheit dar.

An dieses innere Feld schlieſst sich im äuſseren Raume mit stetiger Normalkomponente ein LAPLACE'sches Feld an, welches im unendlich fernen verschwindet. Dieses Feld ist dann das bekannte Radialfeld, wo die Geschwindigkeit beziehungsweise die Polarisation umgekehrt quadratisch abnimmt.

Von diesen in geometrischer Beziehung vollständig miteinander identischen Geschwindigkeits- oder Polarisationsfeldern gehen wir durch Multiplikation mit den ponderomotorischen Aktivitäts-

konstanten $q$ im äufseren, und $Q$ im inneren Raume zu den Feldintensitäten über (I, **104**). Die Geschwindigkeitsfelder waren in diesem einfachen Falle schon an sich potentielle Felder sowohl im äufseren wie im inneren Raume, und da an der Grenzfläche die tangentiellen Vektorkomponenten gleich Null waren, wurde auch die potentielle Grenzflächenbedingung identisch erfüllt. Darin ändert sich nichts durch die Multiplikation mit den Faktoren $q$ und $Q$, und die Feldintensität bildet im ganzen Raume ein vollständiges Potentialfeld, wie es sein mufs.

In einem wichtigen Punkte unterscheidet sich aber dieses Feldintensitätsfeld von dem Geschwindigkeits- oder Polarisationsfelde, und der Unterschied betrifft die Divergenzen. Das Geschwindigkeits- oder Polarisationsfeld hat die Divergenz $\dot{e}$ — kubische Ausdehnungsgeschwindigkeit pro Volumeinheit oder wahre kubische Dichte — und keine Divergenz an der Grenzfläche, da sich die normalen Vektorkomponenten stetig durch die Grenzfläche fortsetzten. Das Feldintensitätsfeld hat andererseits eine kubische Divergenz

(a) $$\bar{e} = Q\dot{e} = \frac{1}{K}\dot{e}$$

und aufserdem eine Divergenz an der Grenzfläche entsprechend der Diskontinuität der Normalkomponente der Feldintensität. Bezeichnen wir mit $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ und $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$ die Normalkomponenten der Geschwindigkeit beziehungsweise der Polarisation, und mit $\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial n}$ und $\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial n}$ die der Feldintensität, so ist also

(b) $$\frac{\partial \varphi}{\partial n} - \frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0,$$

dagegen

(b') $$\bar{e}' = \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial n} - \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial n} = (q - Q)\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{K}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial n}.$$

Wir denken uns nun, dafs die Konstante $Q$ oder $K$ der Kugel alle Werte durchläuft, während gleichzeitig die wahre Dichte oder die kubische Ausdehnungsgeschwindigkeit ihren Wert $\dot{e}$ beibehält. Hat dann die Kugel im hydrodynamischen Falle dieselbe Dichte, im elektrischen dieselbe ponderomotorische Aktivitätskonstante wie das umgebende Medium, $Q = q$, so hat die Feldintensität nur die kubische und keine Flächendivergenz. Nimmt aber die Dichte $Q$ der Kugel ab, ihre Beweglichkeit oder Polarisierbarkeit also zu, so nehmen die Feldintensität und die freie kubische Dichte proportional $Q$ ab. Als Kompensation bildet sich aber eine positive Oberflächen-

schicht (b'). Schliefslich, wenn $Q$ verschwindet, die Kugel also unendlich polarisierbar oder unendlich leicht wird, verschwindet die Feldintensität und die freie Dichte $\varepsilon$ ganz im Innern der Kugel, und die freie Oberflächenschicht erhält ihren gröfsten Wert:

$$\text{(c)} \qquad \varepsilon' = \frac{\partial \varphi}{\partial n}.$$

Die dielektrische Kugel verhält sich in diesem Grenzfalle wie eine leitende Kugel. Die Analogie bezieht sich aber nur auf die Feldintensität und die freien Dichten. Denn Polarisation und wahre Dichte bestehen noch im Innern der unendlich polarisierbaren dielektrischen Kugel, während in leitenden Körpern unter statischen Verhältnissen kein Feld und keine Masse bestehen kann. Die unendlich leichte Kugel dürfen wir deshalb auch nur mit der unendlich polarisierbaren dielektrischen Kugel und nicht mit der leitenden Kugel vergleichen.

Andererseits nehmen wir an, dafs $Q$ von dem Werte $q$ aus zu-, oder $K$ von dem Werte $k$ aus abnimmt. Im elektrischen Falle läfst sich dieses nicht in der Praxis verwirklichen, solange der äufsere Raum der gewöhnliche Luftraum oder der leere Raum ist, wohl aber, wenn der äufsere Raum mit irgend einer dielektrischen Flüssigkeit erfüllt ist. Die freie kubische Dichte $\varepsilon$ und die Feldintensität im inneren Raume nimmt dann proportional $Q$ zu. Als Kompensation für das Anwachsen der freien Dichte im Innern bildet sich aber eine negative Oberflächenschicht $\varepsilon'$.

In allen Fällen, sei es, dafs $Q$ kleiner oder gröfser als $q$ ist, findet man dieselbe totale freie Ladung, wenn man die freien kubischen und Flächenladungen summiert. Wenn $E$ das Volumen und $\acute{E} = \acute{e} E$ die totale wahre Ladung der Kugel ist, wird die Summe der freien kubischen Ladungen $E\varepsilon = Q\acute{e}E = Q\acute{E}$. Andererseits, da das Flächenintegral von $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ gleich $\acute{E}$ ist, wird die Summe der freien Ladungen an der Grenzfläche $(q - Q)\acute{E}$. Die totale freie Ladung wird also immer:

$$\bar{E} = Q\acute{E} + (q - Q)\acute{E} = q\acute{E}.$$

**139. Die Induktionserscheinung im Parallelfelde.** — In dem betrachteten einfachen Falle beruht die vollständige, gleichzeitige Analogie der Geschwindigkeit mit der Polarisation, und der hydrodynamischen Feldintensität mit der elektrischen auf rein kinematischen Ursachen. Denn der Hauptpunkt, dafs die Feldintensität

an der Grenzfläche die potentielle Grenzflächenbedingung erfüllt, ist der, daſs schon aus Symmetriegründen die Tangentialkomponente identisch gleich Null sein muſs. Auf dynamischen Gründen beruht es aber, wenn diese Grenzflächenbedingung für die hydrodynamische Feldintensität auch in den folgenden Fällen erfüllt wird.

Das primär Gegebene soll jetzt im hydrodynamischen Falle ein Parallelstrom, im elektrischen oder magnetischen ein Parallelfeld sein. Dieses wird aber dadurch gestört, daſs eine Kugel hineingebracht wird, deren Beweglichkeit beziehungsweise Polarisierbarkeit $K$ von der entsprechenden Konstante $k$ der Felder verschieden

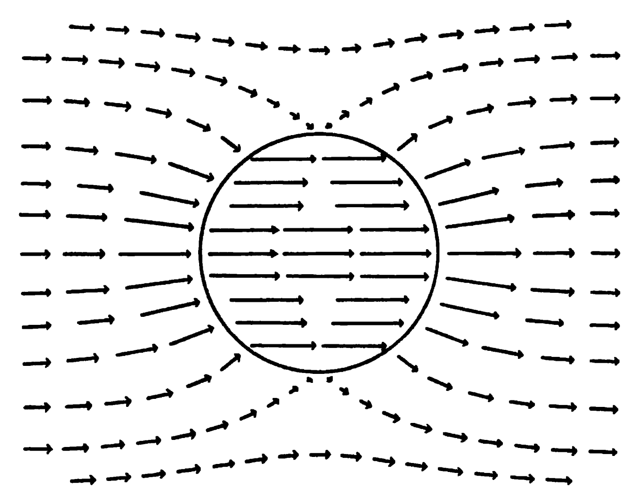


Fig. 57. Geschwindigkeitsfeld einer unendlich beweglichen, Polarisationsfeld einer unendlich polarisierbaren Kugel in einem Parallelfelde.

ist. Die Kugel soll im hydrodynamischen Falle von keinen fremden Kräften bewegt, sondern ganz dem Strome überlassen werden, und entsprechend soll sie im elektrischen oder magnetischen Falle keine permanente Polarisation besitzen.

Das modificierte Feld wird in beiden Fällen durch identisch dieselben Bedingungen eindeutig bestimmt. Die Felder innerhalb wie auſserhalb der Kugel bleiben Laplace'sche, und die Modifikation, welche die Kugel im äuſseren Felde erzeugt, verschwindet im unendlich fernen. Endlich geht die Geschwindigkeit mit stetiger Normalkomponente [I, **13** (b)] durch die Grenzfläche, genau wie die Polarisation [**136** (a)], während in beiden Fällen die Feldintensität mit stetiger Tangentialkomponente hindurchgeht [I, **111** (a); II, **135** (a)]. Die Formeln I, **110**—**113** können deshalb elektrisch oder

magnetisch ebensowohl als hydrodynamisch interpretiert werden. Die gleichzeitige Analogie der Geschwindigkeit mit der Polarisation, und der hydrodynamischen Feldintensität mit der elektrischen oder magnetischen ist somit für den vorliegenden Fall bewiesen. Es hat aber Interesse, an die einzelnen Spezialfälle zu erinnern, ohne dafs wir deshalb die Formeln wieder aufzuschreiben brauchen.

Es habe dann zunächst die Kugel dieselbe Beweglichkeit oder Polarisierbarkeit wie das umgebende Medium, $K = k$. Sie bringt dann keine Modifikation in diesem Felde hervor. Sie macht die Bewegung der Flüssigkeit genau mit, und die Stromlinien setzen

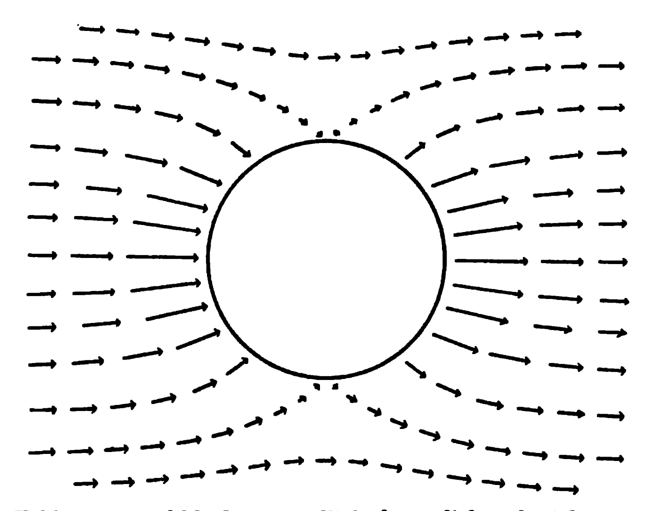


Fig. 58. Feldintensitätsfeld der unendlich beweglichen beziehungsweise der unendlich polarisierbaren Kugel im Parallelfelde.

sich wie die Kraftlinien geradlinig durch sie fort. Es giebt keinen Unterschied zwischen den Vektorkomponenten innerhalb oder aufserhalb der Grenzfläche, und dadurch ist für die Geschwindigkeit oder Polarisation die solenoidale, für die Feldintensität die potentielle Grenzflächenbedingung identisch erfüllt.

Es nehme aber nun die Beweglichkeit beziehungsweise die Polarisierbarkeit der Kugel zu. Sie bewegt sich dann im hydrodynamischen Falle schneller als der Strom, und die Stromlinien biegen sich gegen sie ein, genau wie sich die Kraftlinien gegen die stärker polarisierbare Kugel einbiegen. Dadurch erhält man auch aufserhalb der Kugel gröfsere Normalkomponenten entsprechend den grofsen Normalkomponenten im Innern. Im Grenzfalle, wo die Kugel relativ zu dem umgebenden Felde unendlich polarisierbar

oder unendlich beweglich ist, läuft sie dreimal schneller als der ursprüngliche Strom (I, **108**) oder das Polarisationsfeld in ihrem Innern ist dreimal so intensiv wie das ursprüngliche äufsere Feld. In diesem Falle enden die äufseren Strom- oder Kraftlinien normal gegen die Grenzfläche der Kugel (Figur 57).

Je mehr sich die Strom- oder Kraftlinien senkrecht gegen die Kugelfläche richten, um so kleiner wird die Tangentialkomponente der Feldintensität, und um so schwächer das Feldintensitätsfeld im Innern der Kugel. Im Grenzfalle, wo die Kugel unendlich leicht beweglich oder unendlich polarisierbar ist, steht die Feldintensität im äufseren Raume senkrecht zu der Grenzfläche. Sie hat keine Tangentialkomponente, und die Feldintensität im inneren Raume

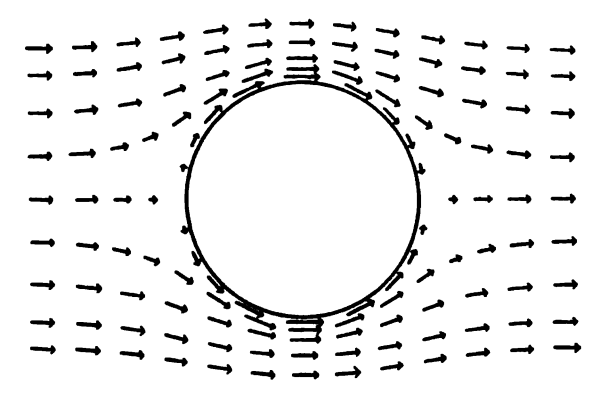


Fig. 59. Geschwindigkeitsfeld einer unbeweglichen, Polarisationsfeld einer unpolarisierbaren Kugel im Parallelfelde.

verschwindet vollständig (Figur 58). Man hat dann eine formale Analogie mit einer leitenden Kugel, aber auch nur eine formale, weil ein Polarisationsfeld im Innern fortwährend besteht. Dieses Verschwinden des einen Feldes, während das andere noch besteht, ist im hydrodynamischen Falle ganz einfach und klar, wenn man sich die Bedeutung der Feldintensität als spezifische Bewegungsgröfse oder als Impuls pro Volumeinheit vergegenwärtigt. Wenn der bewegte Stoff verschwindende Dichte hat, so verschwindet die Bewegungsgröfse bei endlichem Werte der Geschwindigkeit. Oder die Impulse, welche notwendig sind, um eine endliche Geschwindigkeit zu erzeugen, sind Null.

Jetzt kann andererseits die Beweglichkeit oder die Polarisierbarkeit der Kugel von dem Werte $K = k$ aus abnehmen. Die Kugel bewegt sich dann langsamer als der Strom, und die Strom-

linien müssen um sie herumbiegen, genau wie die Kraftlinien um eine schwach polarisierbare oder diamagnetische Kugel umbiegen müssen. Das Geschwindigkeits- oder Polarisationsfeld im inneren Raume nimmt an Intensität ab. Im Grenzfalle, wo die Kugel keine Beweglicheit oder Polarisierbarkeit mehr besitzt, und die Kugel also unendlich schwer oder unendlich diamagnetisch ist, biegen die Kraft- oder Stromlinien ganz um die Kugel herum, und die Geschwindigkeit oder Polarisation im Innern verschwindet (Figur 59). Während dieser Vektor zu Null abnimmt, nimmt die Feldintensität zu, und hat ihren gröfsten Wert, wenn die Geschwindigkeit oder Polarisation im inneren Raume gleich Null geworden ist (Figur 60). Dafs dieses der Fall sein mufs, ersieht man aus dem stetigen Zuwachs der

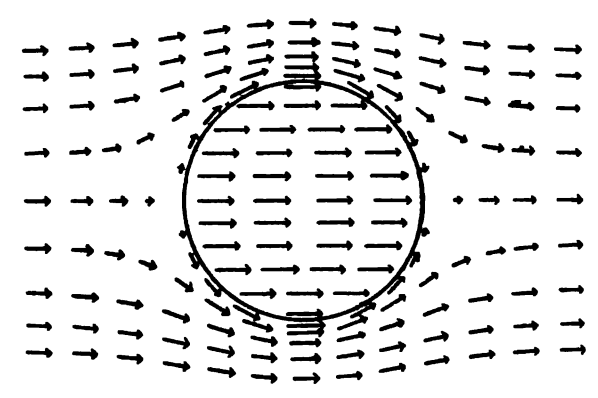


Fig. 60. Feldintensitätsfeld einer unbeweglichen beziehungsweise einer unpolarisierbaren Kugel im Parallelfelde.

Tangentialkomponente der Feldintensität aufserhalb der Grenzfläche, und man versteht es mechanisch, indem man sich der Bedeutung der Feldintensität als Impuls erinnert. Die unendlich schwere Kugel, welche sich mit unendlicher Trägheit der bewegenden Druckkraft der Flüssigkeit entgegensetzt, erleidet einen stärkeren Impuls als eine Kugel, welche leichter ist und der bewegenden Druckkraft nachgiebt. Obgleich die Geschwindigkeit nicht mehr merkbar ist, hat also doch die Kugel mit ihrer unendlichen Masse eine endliche Bewegungsgröfse.

**140. Die inducierten Aktionsschichten und Aktionsintensitäten.** — Die Geschwindigkeit oder Polarisation ist in dem betrachteten Falle ganz divergenzfrei. Wahre Dichten kommen weder im Innern noch an der Grenzfläche der Kugel vor. Die Feldintensität hat

dagegen notwendig eine Divergenz an der Grenzfläche. Hier ist also eine freie Schicht vorhanden,

$$\text{(a)} \qquad \mathfrak{e}' = (\mathfrak{u}', \mathfrak{v}' \mathfrak{w}')_n - (\bar{U}', \bar{V}', \bar{W}')_n = \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \frac{\partial \Phi}{\partial n}.$$

Erinnern wir uns, daſs wegen der Kontinuität der Normalkomponente der Polarisation $k \frac{\partial \varphi}{\partial n} = K \frac{\partial \Phi}{\partial n}$ ist, so erhalten wir

$$\text{(b)} \qquad \mathfrak{e}' = \left(\frac{K}{k} - 1\right) \frac{\partial \Phi}{\partial n} = \varkappa (\bar{U}', \bar{V}', \bar{W}')_n,$$

indem wir zur Abkürzung

$$\text{(c)} \qquad \varkappa = \frac{K}{k} - 1 = \frac{K - k}{k}$$

einführen. Diese freie Flächendichte kann als die Normalkomponente eines Vektors $(\varkappa \bar{U}, \varkappa \bar{V}, \varkappa \bar{W})$ oder

$$\text{(d)} \qquad \mathfrak{f} = \varkappa \bar{U}, \quad \mathfrak{g} = \varkappa \bar{V}, \quad \mathfrak{h} = \varkappa \bar{W},$$

welchen wir die freie Aktionsintensität nennen können, aufgefaſst werden.

Diese freie Aktionsintensität vermittelt den Vergleich der temporär magnetisierten Kugel mit einem permanenten Magnet, und ist die Gröſse, durch welche man auf dem Poisson'schen Wege zu der Theorie des inducierten Magnetismus gelangt; $\varkappa$ ist die Magnetisierungszahl. Nach der Definition (c) können wir sagen, daſs diese Zahl $\varkappa$ den Polarisierbarkeits- oder Beweglichkeitsüberschuſs der Kugel angiebt, bezogen auf die Polarisierbarkeit oder die Beweglichkeit des umgebenden Mediums. Auf diesem Überschuſs beruht das Vermögen der Kugel, sich anders als das umgebende Medium zu polarisieren oder zu bewegen.

Als Rechengröſse ist der Vektor $(\mathfrak{f}, \mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ wie die skaläre Gröſse $\mathfrak{e}'$ nützlich wegen der Rolle, welche er in dem Integralausdruck für das Potential spielt. Im übrigen haben aber die Poisson'schen Vorstellungen weder im Sinne der modernen Elektricitätslehre noch in dem hydrodynamischen Bilde der elektrischen und magnetischen Erscheinungen eine einfache Bedeutung. Nach Poisson faſst man $(\bar{U}, \bar{V}, \bar{W})$ als eine „magnetische Kraft" auf, welche eine ihr proportionale „Magnetisierungsintensität" $(\mathfrak{f}, \mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ erzeugt. Wenn wir aber von dem einmal gefundenen Fundamentalvektor $(\bar{U}, \bar{V}, \bar{W})$ ausgehen, so gelangen wir zu dem Vektor $(\mathfrak{f}, \mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, indem wir aus

$(\bar{U}, \bar{V}, \bar{W})$ einen gewissen proportionalen Teil (d) ausscheiden, und es hat keinen besonders klaren Sinn mehr, wenn man sagt, daſs der Vektor $(\bar{U}, \bar{V}, \bar{W})$ diesen bestimmten Teil erzeugt.

Dagegen hat die neuere Ausdrucksweise, daſs die Feldintensität (oder die elektrische oder magnetische Kraft) die Polarisation erzeugt, vom hydrodynamischen Standpunkte aus nichts Unmögliches an sich. Denn erinnert man sich der Bedeutung der Feldintensität als Impuls, so kann man sehr wohl sagen, daſs der Impuls die Geschwindigkeit erzeugt.

**141. Permanent magnetisierte oder selbständig bewegte Kugel von anderer Polarisierbarkeit oder Beweglichkeit als das umgebende Medium.** — Wir kehren schlieſslich zu dem früher (**131, 132**) unter spezielleren Voraussetzungen behandelten Falle einer selbständig bewegten oder permanent polarisierten Kugel zurück, nur daſs wir die beschränkende Bedingung über die Gleichheit der Polarisierbarkeit oder der Beweglichkeit der Kugel und des umgebenden Mediums fallen lassen.

Solange wir dann nur die Geschwindigkeit beziehungsweise Polarisation oder nur die Feldintensität betrachten, haben wir nichts zu dem früher entwickelten hinzuzufügen. Zu dem als gegeben vorausgesetzten Geschwindigkeits- oder Polarisationsfelde im Innern der Kugel schlieſst sich unter Erfüllung der solenoidalen Grenzflächenbedingung im äuſseren Raume ein eindeutig bestimmtes Geschwindigkeits- oder Polarisationsfeld an. Durch Multiplikation mit der Dichte oder der ponderomotorischen Aktivitätskonstante geht man zu dem Feldintensitätsfelde im äuſseren Raume über, und diesem schlieſst sich wieder im inneren Raume unter Erfüllung der potentiellen Grenzflächenbedingung das eindeutig bestimmte innere Feldintensitätsfeld an.

Wir können aber jetzt des weiteren die Relationen betrachten, welche zwischen Polarisation (Geschwindigkeit) und Feldintensität im inneren Raume bestehen, und die Ausdrücke der Aktionsdichten oder Aktionsintensitäten aufstellen. Den Übergang von dem einen Vektor zu dem anderen vermittelt im allgemeinsten Falle die Relation **137** (c)

$$\text{(a)} \qquad U = U_i + U_e, \quad V = V_i + V_e, \quad W = W_i + W_e,$$

welche die totale Polarisation als die Summe der inducierten und der energetischen darstellt. Die Relation (a) entspricht bis auf

leicht verständliche Änderungen der Bezeichnung genau I, **92** (c), welche die totale Geschwindigkeit innerhalb der Kugel durch die Summe der inducierten und der energetischen darstellt. Anstatt dieser Relation können wir auch für den Übergang **137** (d) benutzen

$$\text{(b)} \qquad \bar{U}_t = \bar{U} + \bar{U}_e, \quad \bar{V}_t = \bar{V} + \bar{V}_e, \quad \bar{W}_t = \bar{W} + \bar{W}_e,$$

welche mit anderen Bezeichnungen I, **94** (b) entspricht. Diese Gleichungen (b) haben eine einfache dynamische Bedeutung. Sie stellen die totale Bewegungsgröße pro Volumeinheit innerhalb der Kugel als die Summe zweier Impulse dar, des von der Flüssigkeit herrührenden Gegenimpulses $(\bar{U}, \bar{V}, \bar{W})$ und des fremden Impulses $(\bar{U}_e, \bar{V}_e, \bar{W}_e)$, welche diesen Gegenimpuls überwunden und außerdem die thatsächlich innerhalb der Kugel vorhandene totale Bewegungsgröße $(\bar{U}_t, \bar{V}_t, \bar{W}_t)$ erzeugt hat. Der energetische Impuls $(\bar{U}_e, \bar{V}_e, \bar{W}_e)$ tritt also als die primäre Ursache des ganzen Bewegungsvorganges auf, und entsprechend kann im magnetischen Falle die energetische Feldintensität als die primäre Ursache der Bildung des permanenten Magnets aufgefaßt werden.

Um für die energetische Geschwindigkeit oder Polarisation $(U_e, V_e, W_e)$ eine anschauliche Definition zu finden, betrachten wir den Grenzfall, wo die Konstante $q$ des äußeren Mediums gleich Null ist. Die Feldintensität im ganzen äußeren Raume wird dann Null, und selbstverständlich auch die Feldintensität oder der Gegenimpuls $(\bar{U}, \bar{V}, \bar{W})$ im inneren Raume. Also verschwindet auch die inducierte Polarisation oder Geschwindigkeit $(U_i, V_i, W_i)$, und die Gleichungen (a) gehen in $U = U_e$, $V = V_e$, $W = W_e$ über. Die energetische Geschwindigkeit oder Polarisation ist also diejenige Geschwindigkeit oder Polarisation, welche die Kugel annehmen würde in einer unendlich leichtbeweglichen Flüssigkeit oder in einem unendlich polarisierbaren Medium.

Andererseits bilden wir die freie Aktionsschicht an der Oberfläche der Kugel:

$$\bar{\varepsilon}' = (\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})_n - (\bar{U}, \bar{V}, \bar{W})_n.$$

Jetzt haben wir wegen der Kontinuität der Normalkomponente der Polarisation $(u, v, w)_n = (U, V, W)_n$. Also nach Multiplikation mit $q$, $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})_n = (q\,U, q\,V, q\,W)_n$. Also

$$\bar{\varepsilon}' = (q\,U, q\,V, q\,W)_n - (\bar{U}, \bar{V}, \bar{W})_n$$

und die freie Aktionsdichte auf der Oberfläche tritt als die Normalkomponente des Vektors

$$f = qU - \bar{U}, \quad g = qV - \bar{V}, \quad h = qW - \bar{W}$$

auf. Diese Gleichungen entsprechen mit anderen Bezeichnungen I, **103** (a). Schliefslich können wir auch $qU, qV, qW$ nach **137** (a) durch die totale Feldintensität ausdrücken. Es wird dann

$$qU = qK\bar{U}_t = \frac{K}{k}\bar{U}_t, \quad \text{etc.}$$

Durch Einsetzen und Umordnung ergiebt sich:

$$\frac{K}{k}\bar{U}_t = \bar{U} + f, \quad \frac{K}{k}\bar{V}_t = \bar{V} + g, \quad \frac{K}{k}\bar{W}_t = \bar{W} + h.$$

Für $K = k$ tritt hier auf der linken Seite die totale Feldintensität $\bar{U}_t, \bar{V}_t, \bar{W}_t$ allein auf, und der Vergleich mit **137** (d) zeigt, dafs dann $(f, g, h)$ mit $(\bar{U}_e, \bar{V}_e, \bar{W}_e)$ identisch wird. Im allgemeinen mufs man aber die freie Aktionsintensität und die energetische Feldintensität scharf voneinander trennen. Die erste ist eine Rechengröfse, mit deren Hilfe man immer durch eine Integration das Potential der Feldintensität finden kann. Die zweite hat im hydrodynamischen Falle die einfache physikalische Bedeutung als Impuls pro Volumeinheit, welcher die Bewegung der Kugel primär erzeugt hat, und dürfte nach Analogie im magnetischen Falle als der eigentliche Repräsentant für die primäre Magnetisierung angesehen werden können.

## Sechster Abschnitt.

### Energie und ponderomotorische Kräfte.

**142. Geometrische und dynamische Analogie.** — In den beiden vorhergehenden Abschnitten haben wir uns mit einer rein geometrischen Seite der Analogie zwischen den hydrodynamischen Erscheinungen und den elektrischen oder magnetischen beschäftigt. In der Ausdehnung, in der das gelöste hydrodynamische Problem uns die Sache zu verfolgen gestattete, haben wir gezeigt, dafs die

Vektorgröſsen, mittels welcher wir die hydrodynamischen Stromfelder beschreiben, im Raume analog verteilt waren, und unter sich in analogen Beziehungen standen wie die Vektorgröſsen, mit deren Hilfe wir die elektrischen und magnetischen Felder beschreiben. Dieses traf selbst in den inneren Räumen zu, wo im allgemeinsten Falle die vollständige Beschreibung des Feldes die gleichzeitige Anwendung zweier voneinander unabhängiger Vektorgröſsen erfordert.

Ob diese Analogie etwas mehr als eine rein geometrische Thatsache ist, bleibt bei unserer jetzigen beschränkten Kenntnis der elektrischen und magnetischen Erscheinungen eine offene Frage. Die hydrodynamischen Gröſsen sind teils Geschwindigkeiten und teils spezifische, oder auf die Einheit des Volumens bezogene Impulse. Über die physikalische Natur der entsprechenden elektrischen und magnetischen Gröſsen wissen wir aber gar nichts.

So viel steht aber fest, daſs sich diese geometrische Analogie in einer Analogie mehr als rein geometrischen Inhaltes fortsetzt. Denn, wie wir schon wissen, üben die Körper, deren Felder in geometrischer Beziehung miteinander identisch sind, Wirkungen in die Ferne aufeinander aus. Und soweit wir es bis jetzt haben untersuchen können, folgen diese Fernwirkungen — von dem einen Unterschied im Vorzeichen abgesehen — identisch denselben Gesetzen. Hier sind es Gröſsen gleicher physikalischer Natur, nämlich Kräfte im gewöhnlichen mechanischen Sinne des Wortes, welche Gegenstand des Vergleiches sind. Sehr auffällig ist es, daſs eben hier, wo die Analogie intimster Natur wird, auch der einzige Unterschied hervortritt, dem wir überhaupt begegnen, nämlich der Unterschied in der Richtung der Kräfte. Wie sich aber auch das Rätsel dieses Gegensatzes in der Zukunft lösen wird, so ist klar, daſs der Kernpunkt — trotz des entgegengesetzten Vorzeichens — in der Analogie zwischen den ponderomotorischen Kräften und in dem Zusammenhange dieser dynamischen Analogie mit der zwischen den Feldern bestehenden geometrischen zu suchen ist.

Nachdem jetzt der genaue Vergleich der Felder den Weg geebnet hat, werden wir deshalb die Untersuchung dadurch abschlieſsen, daſs wir den Vergleich der ponderomotorischen Kräfte so weit führen, wie es auf Grundlage des gelösten hydrodynamischen Problems möglich ist. Die Aufgabe lösen wir am bequemsten dadurch, daſs wir erst die Energie der elektrischen oder magnetischen Kraftfelder und der hydrodynamischen Stromfelder miteinander vergleichen.

**143. Elektrische und magnetische Energie.** — Zu den Formeln, welche man als Fundamentalausdruck der elektrischen oder der magnetischen Energie ansieht, gelangt man wieder nur auf dem Wege der Induktion und der induktiven Verallgemeinerung.

Als Ausgangspunkt können wir die für ein vollständig homogenes Feld gültig gefundene Kräftefunktion **125** (d) nehmen. Mit dem entgegengesetzten Vorzeichen stellt dieser Ausdruck die potentielle Energie des elektrischen Systems dar:

$$W = \tfrac{1}{2}\int\int\frac{\acute{e}_1\,\bar{e}_2\,d\tau_1\,d\tau_2}{4\pi r}. \tag{a}$$

Wenn wir diese Formel auch im Falle von Magneten anwenden, so ist zu erinnern, dafs keine wirklich wahre Dichte $\acute{e}_1$ besteht, sondern nur eine fiktive [**128** (h)]. Da wir somit auf unwirklichen Vorstellungen fufsen, können wir nicht mit Sicherheit behaupten, dafs (a) den gesamten Energievorrat des Magnets giebt. Nur wissen wir, dafs (a) den Energiebetrag darstellt, welcher sich durch Fernwirkungen bei der Verschiebung ganzer Körper relativ zu einander umsetzt.

Dieses Integral, so wie wir es direkt auf Grundlage der Erfahrungsthatsachen finden, stellt die Energie als auf Fernkräften beruhend dar. Es läfst sich aber mathematisch in eine andere Form bringen, wo die Energie durch die Feldvektoren ausgedrückt wird. Um uns die Rechnung bequem zu machen, nehmen wir an, dafs keine Diskontinuitäten und keine Flächendichten vorkommen. Implicite bleiben aber die Diskontinuitäten berücksichtigt, da wir sie als Grenzfälle rascher aber stetiger Änderungen ansehen können. Mit dem Aufhören der scharfen Grenze hört auch der Grund auf, den äufseren von dem inneren Raume scharf zu trennen, und wir brauchen nicht mehr dieselbe Gröfse in den zwei Räumen durch verschiedene Buchstaben zu bezeichnen. Im folgenden bedeutet also $\varphi$ das Potential der Feldintensität, $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$ die Feldintensität, und $(u, v, w)$ die Polarisation sowohl im äufseren wie im inneren Raume. Die Polarisierbarkeit im ganzen Raume bezeichnen wir durch $K$, die ponderomotorische Aktivitätskonstante durch $Q$.

Die Transformation von (a) ist nun die folgende, wobei wir nur die Hauptpunkte wiedergeben, ohne auf die für den strengen Beweis notwendigen aber wohlbekannten Diskussionen der einzelnen mathematischen Operationen einzugehen. Mit Hilfe des Potentialausdruckes **126** (b) können wir (a) in der Form

(b) $$W = -\tfrac{1}{2}\int \acute{e}\,\varphi\, d\tau$$

schreiben. Dabei haben wir gleichzeitig die Indices weggelassen, weil wir nicht mehr zwischen zwei verschiedenen Integrationen zu unterscheiden brauchen. Die wahre Dichte $\acute{e}$ können wir nun $K\bar{e}$ schreiben, und nach **127** (b) $\bar{e}$ durch $\nabla^2\varphi$ ersetzen:

(c) $$W = -\tfrac{1}{2}\int K\varphi\, \nabla^2 \varphi\, d\tau.$$

Dieses Integral läfst sich nach GREEN's Theorem (I, **82**) transformieren innerhalb einer sehr grofsen Fläche, am einfachsten einer Kugel, welche das ganze System von Ladungen umgiebt. Dadurch ergiebt sich $W$ in der Form eines kubischen Integrals innerhalb, und eines Flächenintegrals auf der Kugelfläche. Das letztere verschwindet, wenn man den Radius der Kugel über jede Grenze hinaus wachsen läfst, und zurück bleibt nur das kubische Integral:

(d) $$W = \tfrac{1}{2}\int K\left\{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right\} d\tau.$$

Wenn wir die Vektorgröfsen $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$ oder $(u, v, w)$ einführen, wird dieses:

(e) $$W = \tfrac{1}{2}\int K\{\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2\}\, d\tau.$$

An dieses Resultat der Rechnung knüpfen wir nun wieder, wie so oft, einen Induktionsschlufs physikalischen Inhaltes. In (e) ist nämlich die Energie durch eine der Vektorgröfsen ausgedrückt, welche wir als Repräsentant für die elektrischen Fundamentalerscheinungen ansehen, und dementsprechend fassen wir (e) als den fundamentalen Ausdruck der elektrischen Energie auf, den wir den späteren Verallgemeinerungen zu Grunde legen, den Ausdruck (a) dagegen, zu dem wir auf Grundlage unserer unmittelbaren Erfahrungen geführt wurden, als eine unter gewissen Verhältnissen zweckmäfsige Umformung des Fundamentalausdruckes.

Solange es sich nun um ein elektrisiertes System handelt, giebt die Formel (e) zu weiteren Bemerkungen keinen Anlafs. Wenn wir sie aber auf das Feld permanenter Magnete anwenden, so haben wir schon bemerkt, dafs wir nicht wissen, ob die Ausgangsformel (a) den gesamten Energiewert darstellt. Nun kennen wir im Innern des Magnets zwei voneinander unabhängige Vektoren, und es liegt nahe, die Formel (e) durch die folgenden zu ersetzen

(f) $$W = \tfrac{1}{2}\int Q\{u^2 + v^2 + w^2\}\,d\tau,$$

wo wir die Feldintensität durch die Polarisation ersetzt haben. Diese Annahme wird besonders darauf gestützt, dafs man zu diesem Werte der Energie geführt wird, wenn man den Magnet durch das äquivalente System von elektrischen Strömen ersetzt. Für die uns vorliegende Aufgabe der genaueren Berechnung der magnetischen Wirkungen in die Ferne bleibt die Frage, welche Formel den richtigen Wert der Energie giebt, belangslos. Denn der Unterschied von (e) und (f) ist ein Energiebetrag, welcher sich bei der Verschiebung der Magnete relativ zu einander nicht verändert, und daher für die Berechnung der Fernkräfte belanglos ist. Unsere weiteren Betrachtungen knüpfen wir an die erste Form (e) an.

Schliefslich nehmen wir induktiv verallgemeinernd an, dafs die gefundene Formel (e), die wir nur für homogene Medien ableiten können, auch die Energie in den heterogenen Medien darstellt, wo die Gröfsen $K$ oder $Q$ nicht mehr Konstanten sind, sondern als Funktionen der Koordinaten auftreten. Mit Rücksicht auf diese Verallgemeinerung haben wir schon von Anfang an diese Faktoren innerhalb des Integralzeichens geschrieben.

Blicken wir nun auf die hydrodynamischen Erscheinungen, so wird das Resultat der Induktionsschlüsse wieder durch Analogie bestätigt. Die Formeln (e) oder (f) geben die Energie der hydrodynamischen Stromfelder; denn $\tfrac{1}{2}K(\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2)$ oder $\tfrac{1}{2}Q\{u^2 + v^2 + w^2\}$ ist nichts anderes als die lebendige Kraft pro Volumeinheit im Stromfelde, und zwar sowohl im Homogenitätsfalle, wo $Q$ konstant ist, wie im Heterogenitätsfalle mit veränderlichem $Q$. Wenn es sich um die oscillierende Kugel handelt, wo die Integrale (e) und (f) verschiedene Beträge geben, so giebt (f) die vollständige Energie. Will man aber die Energie nur für die Berechnung von Fernkräften verwerten, so ist es belanglos, ob man von (e) oder (f) ausgeht.

Die Analogie ist aber schon hier invers. Denn (e) oder (f) ist die kinetische Energie des hydrodynamischen Systems, dagegen die potentielle des elektrischen und magnetischen Systems, und daraus folgt sofort, dafs die mechanischen Kräfte in den zwei Fällen entgegengesetzte Richtungen haben müssen.

**144. Analytische Umformungen des Energieausdruckes.** — Der Faktor $K$ war nach unseren ursprünglichen Voraussetzungen (135)

eigentlich nur an gewissen Grenzflächen veränderlich, und sonst innerhalb wie aufserhalb der Grenzflächen räumlich konstant. Um mathematische Weitläufigkeit zu vermeiden, sehen wir aber von der Diskontinuität ab, und benutzen die bekannte Vorstellung von einer Übergangsschicht, wo $K$ stetig aber schnell von dem einen Werte zu dem anderen sich verändert. Diese Übergangsschicht wird immer als zu dem Körper gehörig angesehen, und macht die Bewegung des Körpers mit.

Wenn diese Stetigkeit von $K$ angenommen ist, können wir das Integral **143** (e) nach einer bekannten Formel transformieren, welche das GREEN'sche Theorem als Spezialfall enthält. Die Transformation findet wieder innerhalb einer grofsen Kugel statt, welche das ganze System von Körpern umschliefst. Dabei ergiebt sich ein kubisches Integral innerhalb der Kugelfläche und ein Flächenintegral auf dieser Fläche. Letzteres verschwindet, wenn man den Radius der Kugel über jede Grenze hinaus wachsen läfst, und wir erhalten als neuen Ausdruck von $W$ das über den ganzen Raum ausgedehnte kubische Integral

$$\text{(a)} \qquad W = -\tfrac{1}{2}\int \varphi \left\{ \frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(K\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(K\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)\right\} d\tau,$$

wo man sich erinnern mufs, dafs $K$ in den Grenzschichten von $x, y, z$ abhängt. Da $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)$ die Feldintensität von $(\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w})$ ist, so stellt $\left(K\frac{\partial \varphi}{\partial x}, K\frac{\partial \varphi}{\partial y}, K\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)$ im Innern eines nicht permanent-polarisierten Körpers die Polarisation $(u, v, w)$ dar, deren Divergenz der wahren Dichte $\acute{e}$ gleich ist [**127** (g)]. Also:

$$\text{(b)} \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(K\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(K\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) - \acute{e} = 0.$$

In einem permanenten Magnet oder einem Turmalinkrystall ist dagegen $\left(K\frac{\partial \varphi}{\partial x}, K\frac{\partial \varphi}{\partial y}, K\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)$ nicht mehr mit der totalen, sondern nur mit der inducierten Polarisation $(u_i, v_i, w_i)$ identisch, deren Divergenz $\acute{e}_f$ nicht mehr die wahre Dichte ist, sondern eine fiktive Dichte, welche rechnerisch ähnlich wie die wahre verwertet werden kann. Indem wir hieran erinnern, können wir aber (b) auch für den Fall der permanent-polarisierten Körper anwenden, indem wir einmal $\acute{e}$ als die wirkliche wahre Dichte, und einmal als diese fiktive Dichte interpretieren, welche in der Rechnung eine genau ähnliche Rolle wie die wahre spielt.

Mit Hilfe von (b) läſst sich (a) in die folgende Form bringen:

$$W = -\tfrac{1}{2}\int \varepsilon \varphi \, d\tau. \tag{c}$$

Von diesem Ausdrucke kann man schlieſslich durch Einführung des Ausdruckes **126** (b) für $\varphi$ wieder zu der Formel **143** (a) gelangen, nur daſs dieselbe dabei auch bei variablem $K$ als gültig erwiesen ist.

Für unsere Rechnungen ist eine aus (c) und **143** (d) gebildete gemischte Form die zweckmäſsigste. Diese ergiebt sich, wenn wir die rechte Seite von **143** (c) von dem doppelten der rechten Seite von (c) abziehen, also:

$$W = -\int \left\{ \varepsilon \varphi + \tfrac{1}{2} K \left\{ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2 \right\} \right\} d\tau. \tag{d}$$

Die hier auftretenden $\varphi$, $K$ und $\varepsilon$ sind durch die Relation (b) verbunden, und man erkennt leicht, daſs das Integral (d) die folgende wichtige Eigenschaft hat: Jede Variation des Potentials $\varphi$, welche der Gleichung (b) genügt, läſst den Wert des Integrals (d) unverändert. Denn eine Variation $\delta \varphi$ hat zur Folge, daſs das Integral rechts in (d) um den Betrag

$$-\int \left\{ \varepsilon \delta \varphi + K \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \delta \varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \delta \varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \delta \varphi \right) \right\} \delta \tau \tag{e}$$

zunimmt. Wenn wir andererseits die Gleichung (b) mit $\delta \varphi \, d\tau$ multiplicieren, und über den ganzen Raum integrieren, so ergiebt sich:

$$-\int \left\{ \varepsilon \delta \varphi - \left( \frac{\partial}{\partial x}\left(K \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) \delta \varphi + \frac{\partial}{\partial y}\left(K \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) \delta \varphi + \frac{\partial}{\partial z}\left(K \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) \delta \varphi \right) \right\} d\tau = 0.$$

Die drei letzten Glieder werden durch teilweise Integration im ganzen Raume transformiert, und es ergiebt sich dann, daſs die linke Seite dieser Gleichung mit der Variation (e) des Energieintegrals identisch wird. Diese Variation ist also identisch gleich Null, wodurch also erwiesen ist, daſs jede Variation des Potentials $\varphi$, welche der Gleichung (b) genügt, das Integral (d) unverändert läſst.

**145. Die Arbeit der mechanischen Kräfte bei der Verschiebung eines Körpers.** — Wir wollen nun annehmen, daſs einer der elektrisierten oder magnetisierten Körper unendlich wenig verschoben

wird, aber in solcher Weise, daſs er sich wie ein starrer Körper bewegt. Die Verschiebungen $\delta x, \delta y, \delta z$ eines beliebigen Punktes des Körpers lassen sich dann in der Form

$$\text{(a)} \qquad \begin{aligned} \delta x &= \delta a + \delta q (z - c) - \delta r (y - b) \\ \delta y &= \delta b + \delta r (x - a) - \delta p (z - c) \\ \delta z &= \delta c + \delta p (y - b) - \delta q (x - a) \end{aligned}$$

darstellen, wenn $\delta a, \delta b, \delta c$ die Verschiebungen eines bestimmten Punktes $a, b, c$ des Körpers sind, und $\delta p, \delta q, \delta r$ die im Winkelmaſs gemessenen unendlich kleinen Drehungen des Körpers um drei zu den Koordinat-Achsen parallele Achsen durch diesen Punkt darstellen.

Die Variation $\delta W$, welche die elektrische oder die magnetische Energie als Folge der Verschiebung (a) des Körpers erleidet, ist nun leicht zu berechnen, wenn wir von der Form **144** (d) des Energieintegrals ausgehen. Denn nach der bewiesenen Eigenschaft kommen die Variationen $\delta \varphi$ des Potentials, welche die Verschiebungen $\delta x, \delta y, \delta z$ zur Folge haben mögen, nicht in Betracht. Bei der Bildung der Variation des Integrals haben wir also nur danach zu fragen, mit welchen neuen wahren Dichten $\acute{e} + \delta \acute{e}$, und mit welchen neuen Polarisierbarkeiten $K + \delta K$ wir innerhalb eines beliebigen geometrischen Volumelementes nach der Verschiebung zu rechnen haben. Die negative Variation von $W$ oder die Energieabnahme $-\delta W$ läſst sich also ganz allgemein

$$\text{(b)} \qquad -\delta W = \int \left\{ \varphi \, \delta \acute{e} + \tfrac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] \delta K \right\} d\tau$$

schreiben, und da $\delta \acute{e}$ und $\delta K$ nur innerhalb des verschobenen Körpers von Null verschiedene Werte haben, brauchen wir die Integration nur über den von dem verschobenen Körper eingenommenen Raum auszudehnen.

Wenn sich der Körper wie ein starrer Körper bewegt, so lassen sich die Werte der Variationen $\delta \acute{e}$ und $\delta K$ sofort angeben. Denn es ist klar, daſs man im geometrischen Punkte $x, y, z$ nach der Verschiebung dieselbe Dichte $\acute{e}$ und Polarisierbarkeit $K$ haben wird, die man vor der Verschiebung im Punkte $x - \delta x$, $y - \delta y$, $z - \delta z$ hatte. Also werden:

$$\delta \acute{e} = -\frac{\partial \acute{e}}{\partial x}\delta x - \frac{\partial \acute{e}}{\partial y}\delta y - \frac{\partial \acute{e}}{\partial z}\delta z \qquad \delta K = -\frac{\partial K}{\partial x}\delta x - \frac{\partial K}{\partial y}\delta y - \frac{\partial K}{\partial z}\delta z.$$

Oder nach Einsetzung der Werte der Verschiebungen nach (a):

$$\begin{aligned} \delta \acute{e} = &-\frac{\partial \acute{e}}{\partial x}\delta a - \frac{\partial \acute{e}}{\partial y}\delta b - \frac{\partial \acute{e}}{\partial z}\delta c \\ &-\left\{(y-b)\frac{\partial \acute{e}}{\partial z} - (z-c)\frac{\partial \acute{e}}{\partial y}\right\}\delta p \\ &-\left\{(z-c)\frac{\partial \acute{e}}{\partial x} - (x-a)\frac{\partial \acute{e}}{\partial z}\right\}\delta q \\ &-\left\{(x-a)\frac{\partial \acute{e}}{\partial y} - (y-b)\frac{\partial \acute{e}}{\partial x}\right\}\delta r \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \delta K = &-\frac{\partial K}{\partial x}\delta a + \frac{\partial K}{\partial y}\delta b + \frac{\partial K}{\partial z}\delta c \\ &-\left\{(y-b)\frac{\partial K}{\partial z} - (z-c)\frac{\partial K}{\partial y}\right\}\delta p \\ &-\left\{(z-c)\frac{\partial K}{\partial x} - (x-a)\frac{\partial K}{\partial z}\right\}\delta q \\ &-\left\{(x-a)\frac{\partial K}{\partial y} - (y-b)\frac{\partial K}{\partial x}\right\}\delta z \end{aligned}$$

Durch Einsetzen in (b) ergiebt sich die Energieabnahme $-\delta W$ in der Form

$$-\delta W = X\delta a + Y\delta b + Z\delta c + L\delta p + M\delta q + N\delta r,$$

wobei die Ausdrücke von $X$ und $L$

$$\text{(c)}\quad X = -\int\left\{\varphi\frac{\partial \acute{e}}{\partial x} + \tfrac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right]\frac{\partial K}{\partial x}\right\}d\tau$$

$$\begin{aligned}\text{(d)}\quad L = -\int\Bigg\{&\varphi\left[(y-b)\frac{\partial \acute{e}}{\partial z} - (z-c)\frac{\partial \acute{e}}{\partial y}\right] \\ &+ \tfrac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right]\left[(y-b)\frac{\partial K}{\partial z} - (z-c)\frac{\partial K}{\partial y}\right]\Bigg\}\delta\tau\end{aligned}$$

sind. Die Ausdrücke von $Y$ und $Z$, $M$ und $N$ ergeben sich durch cyklische Vertauschung.

Die somit bestimmten $X, Y, Z$ sind die Komponenten der Kraft, und $L, M, N$ die Komponenten des Drehungsmomentes, mit welchen der verschobene Körper infolge des elektrischen Zustandes des Systems angegriffen wird.

Durch Transformation der Integrale lassen sich die Ausdrücke auf einfachere Formen bringen. $X$ läfst sich als die Summe von zwei Integralen schreiben, von denen das erste

$$-\int\varphi\frac{\partial \acute{e}}{\partial x}d\tau$$

ist. Wegen der vorausgesetzten stetigen Variation aller Gröfsen wird $\acute{e}$ in der Grenzschicht stetig zu Null abnehmen, also an der

Grenzfläche Null sein. Denn wir setzten voraus, daſs diese Grenzschicht dem Körper angehört und sich mit demselben bewegt (**144**). Wenn wir deshalb das obige Integral durch teilweise Integration innerhalb der Grenzfläche umformen, so wird das Oberflächenintegral Null, und zurück bleibt nur das kubische:

(c′) $$\int e \frac{\partial \varphi}{\partial x} d\tau.$$

Im zweiten Teil von $X$ können wir die Polarisierbarkeit $K$ durch den Überschuſs $K' = K - k$ der veränderlichen Polarisierbarkeit $K$ des Körpers über die konstante $k$ des umgebenden Mediums einführen, und daher den betreffenden Teil von $X$ in der Form

$$-\tfrac{1}{2}\int\left\{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right\}\frac{\partial K'}{\partial x}\delta\tau$$

schreiben. Transformieren wir durch teilweise Integration, so verschwindet wieder das Integral über die Grenzfläche, weil hier $K'$ gleich Null ist, und das Integral wird

$$\tfrac{1}{2}\int K' \frac{\partial}{\partial x}\left\{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right\}\delta\tau$$

oder nach Ausführung der Differentiation:

$$\int\left\{K' \frac{\partial \varphi}{\partial x}\,\frac{\partial}{\partial x}\,\frac{\partial \varphi}{\partial x} + K' \frac{\partial \varphi}{\partial y}\,\frac{\partial}{\partial y}\,\frac{\partial \varphi}{\partial x} + K' \frac{\partial \varphi}{\partial z}\,\frac{\partial}{\partial z}\,\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right\}d\tau.$$

Die drei Glieder dieses Integrals können wir nun wieder durch teilweise Integration, das erste nach $x$, das zweite nach $y$, und das dritte nach $z$ umformen. Dabei verschwinden wieder die sich ergebenden Oberflächenintegrale, weil $K'$ an der Oberfläche Null ist, und das Integral nimmt die Form

$$-\int\frac{\partial \varphi}{\partial x}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(K'\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(K'\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(K'\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)\right\}d\tau$$

an. Durch Substitution des Wertes $K' = K - k$, und Erinnerung der Konstanz von $k$ ergiebt sich

$$-\int\frac{\partial \varphi}{\partial x}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(K\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(K\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)\right\}d\tau + \int k\frac{\partial \varphi}{\partial x}\nabla^2\varphi\, d\tau$$

oder nach den Definitionen der wahren und der freien Dichten [**127** (b), **144** (b)]:

(c'') $$-\int \acute{\varepsilon} \frac{\partial \varphi}{\partial x} d\tau + \int \varepsilon . k \frac{\partial \varphi}{\partial x} d\tau .$$

Als Summe von (c') und (c'') reduciert sich also $X$ auf:

(e) $$X = \int \varepsilon . k \frac{\partial \varphi}{\partial x} d\tau .$$

In ähnlicher Weise läſst sich $L$ transformieren. $L$ besteht nach (d) ebenfalls aus zwei Gliedern, von denen wir zuerst

$$-\int \varphi \left\{ (y-b) \frac{\partial \acute{\varepsilon}}{\partial z} - (z-c) \frac{\partial \acute{\varepsilon}}{\partial y} \right\} d\tau$$

behandeln. Teilweise Integration des ersten Gliedes nach $z$ und des zweiten nach $y$ unter Erinnerung, daſs $\acute{\varepsilon}$ an der Grenzfläche Null ist, giebt:

(d') $$\int \acute{\varepsilon} \left\{ (y-b) \frac{\partial \varphi}{\partial z} - (z-c) \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right\} d\tau .$$

Im zweiten Teil von $L$ führen wir wieder die Überschuſspolarisierbarkeit $K'$ des Körpers ein. Es handelt sich dann um die Transformation von:

$$-\tfrac{1}{2}\int \left[ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2 \right] \left[ (y-b) \frac{\partial K'}{\partial z} - (z-c) \frac{\partial K'}{\partial y} \right] d\tau .$$

Durch teilweise Integration des ersten Teiles dieses Integrals nach $z$, des zweiten nach $y$ ergiebt sich

$$\tfrac{1}{2}\int K' \left\{ (y-b) \frac{\partial}{\partial z} \left[ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2 \right] \right.$$
$$\left. - (z-c) \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2 \right] \right\} d\tau ,$$

oder nach Ausführung der Differentiation:

$$\int \left\{ K' (y-b) \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right] \right.$$
$$\left. - K' (z-c) \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right] \right\} d\tau .$$

Die drei Glieder der ersten Zeile und die drei der zweiten formen wir durch teilweise Integration nach $x$, $y$ und $z$ beziehungsweise um. Nach Zusammenziehung ergiebt sich dann:

$$-\int\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial z}(y-b)-\frac{\partial\varphi}{\partial y}(z-c)\right\}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(K'\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(K'\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(K'\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\right\}d\tau.$$

Führen wir hier, wie bei der Behandlung des entsprechenden Gliedes von $X$, $K' = K - k$ ein, und erinnern uns der Definitionen der wahren und der freien Dichten, so ergiebt sich:

$$(\mathrm{d}'')\quad -\int\varepsilon\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial z}(y-b)-\frac{\partial\varphi}{\partial y}(z-c)\right\}d\tau+\int\bar{\varepsilon}\left\{k\frac{\partial\varphi}{\partial z}(y-b)-k\frac{\partial\varphi}{\partial y}(z-c)\right\}d\tau.$$

Als Summe von (d') und (d'') wird also für $L$ der Wert

$$(\mathrm{f})\qquad L=\int\bar{\varepsilon}\left\{k\frac{\partial\varphi}{\partial z}(y-b)-k\frac{\partial\varphi}{\partial y}(z-c)\right\}d\tau.$$

gefunden.

Das in den Ausdrücken (e) und (f) auftretende $\varphi$ ist das Feldintensitätspotential sämtlicher freien Massen des Systems. Wir können es in zwei Teile zerlegen

$$\varphi=\varphi_1+\varphi_2,$$

wo $\varphi_1$ von den freien Massen des verschobenen, und $\varphi_2$ von den freien Massen der wirkenden Körper herrührt. Entsprechend zerlegen sich dann (e) und (f), und die Integrale, welche das Potential $\varphi_1$ der verschobenen Massen enthalten, werden identisch gleich Null sein, weil sie die Kraft oder die Kräftepaare darstellen, welche der verschobene Körper auf sich selbst ausübt. Nur $\varphi_2$ giebt ein von Null verschiedenes Resultat, und wir brauchen von jetzt an nur $\varphi_2$ in den Integralausdrücken von $X$ und $L$ beizubehalten. Gleichzeitig können wir

$$u=k\frac{\partial\varphi_2}{\partial x},\qquad v=k\frac{\partial\varphi_2}{\partial y},\qquad w=k\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}$$

einführen. $u, v, w$ ist dann die Polarisation desjenigen Partialfeldes, welches von den freien Massen der nicht verschobenen Körper herrührt. Zuletzt können wir auch die vorläufig zur Erleichterung der Rechnung eingeführte Beschränkung über die stetige Variation aller Gröfsen in der Übergangsschicht fallen lassen. Aus den kubischen Integralen (e) und (f) scheiden sich dann ebenfalls Oberflächenintegrale mit den Oberflächendichten $\bar{\varepsilon}'$ aus. Das schliefsliche Resultat werden dann die folgenden Ausdrücke der Komponenten der Kräfte und der Drehungsmomente

$$
\text{(g)}\qquad
\begin{aligned}
X &= \int \bar{e}\,u\,d\tau + \int \bar{e}'\,u'\,d\sigma \\
Y &= \int \bar{e}\,v\,d\tau + \int \bar{e}'\,v'\,d\sigma \\
Z &= \int \bar{e}\,w\,d\tau + \int \bar{e}'\,w'\,d\sigma
\end{aligned}
$$

$$
\text{(h)}\qquad
\begin{aligned}
L &= \int \{\bar{e}\,w\,(y-b) - \bar{e}\,v\,(z-c)\}\,d\tau + \int \{\bar{e}'\,w'\,(y-b) - \bar{e}'\,v'\,(z-c)\}\,d\sigma \\
M &= \int \{\bar{e}\,u\,(z-c) - \bar{e}\,w\,(x-a)\}\,d\tau + \int \{\bar{e}'\,u'\,(z-c) - \bar{e}'\,w'\,(x-a)\}\,d\sigma \\
N &= \int \{\bar{e}\,v\,(x-a) - \bar{e}\,u\,(y-b)\}\,d\tau + \int \{\bar{e}'\,v'\,(x-a) - \bar{e}'\,u'\,(y-b)\}\,d\sigma
\end{aligned}
$$

Das in diesen Formeln enthaltene Resultat läſst sich folgendermaſsen aussprechen:

*Die Resultantkraft* $(X, Y, Z)$ *und das resultierende Drehungsmoment* $(L, M, N)$, *welche einen elektrisierten oder magnetisierten starren Körper angreifen, lassen sich als die Resultante und das resultierende Drehungsmoment eines Systems von Elementarkräften darstellen, welche man sich als die einzelnen Volum- und Flächenelemente angreifend vorstellen kann, und deren Betrag pro Volum- oder Flächeneinheit das Produkt der vorhandenen freien Aktionsdichte in die Polarisation des Feldes, welches die freien Massen der wirkenden Körper erzeugen, ist.*

Es muſs zuletzt wieder hervorgehoben werden, daſs diese Elementarkräfte $(\bar{e}\,u, \bar{e}\,v, \bar{e}\,w)$ und $(\bar{e}'\,u', \bar{e}'\,v', \bar{e}'\,w')$ nur bequeme Rechengröſsen sind, welche die Resultantkraft zu berechnen gestatten unter den vorausgesetzten speziellen Verhältnissen, nämlich wenn es sich um einen starren Körper handelt. Welche Kräfte wirklich in jedem Punkte des Körpers angreifen, ist eine schwierigere Frage, welche wir nicht zu beantworten versucht haben.

**146. Vergleich mit den hydrodynamischen Energiekräften.** — Die obigen Formeln (g) für die Kraft $(X, Y, Z)$ sind mit I, **148** (a), und die entsprechenden Formeln (h) für das Drehungsmoment sind mit I, **150** (c) identisch. Ebenfalls entspricht der aufgestellte Satz dem Satze I, **150**. Dabei entspricht der Begriff des Feldes, welches die freien Massen der wirkenden Körper erzeugen, genau dem Be-

griffe des „Einfallsstromes“. Nur hat man den durchgehenden Unterschied, daſs die elektrischen oder magnetischen Elementarkräfte

$$\bar{e}u, \quad \bar{e}v, \quad \bar{e}w, \qquad \bar{e}'u', \quad \bar{e}'v', \quad \bar{e}'w',$$

die hydrodynamischen dagegen

$$-\bar{e}u, \quad -\bar{e}v, \quad -\bar{e}w, \qquad -\bar{e}'u', \quad -\bar{e}'v', \quad -\bar{e}'w'$$

sind, so daſs die Kraftrichtungen die gerade entgegengesetzten sind.

Wir haben dadurch die Frage von der Analogie der hydrodynamischen Energiekräfte mit den ponderomotorischen Kräften der Elektrostatik und des Magnetismus so weit geführt, wie es geschehen kann, ohne daſs wir den Rahmen des einmal aufgestellten hydrodynamischen Problems verlassen. Die Divergenzen $\bar{e}$ sind im hydrodynamischen, wie im elektrischen und magnetischen Falle eindeutig durch die Feldintensität gegeben. Das Resultat sagt also aus: solange das hydrodynamische Feld sowohl mit Rücksicht auf Feldintensität $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$ wie mit Rücksicht auf Geschwindigkeit $(u, v, w)$ dem elektrischen oder magnetischen Felde mit Rücksicht auf Feldintensität $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$ und Polarisation $(u, v, w)$ geometrisch analog ist, wird auch die inverse dynamische Analogie zwischen den ponderomotorischen Kräften bestehen.

Hierdurch haben wir auch nicht zu viel behauptet. Denn das Resultat sagt aus, daſs mit dem Aufhören der geometrischen Analogie der Felder auch ein Aufhören der dynamischen Analogie folgen wird, wie wir schon gesehen haben. Denn wenn wir unsere Untersuchungen so weit treiben, daſs wir die Reaktionsfelder berücksichtigen, welche aus der Starrheit der Kugeln folgen, so begegnen wir erstens Feldern und dann ponderomotorischen Kräften (92), welche nicht bei elektrostatischen oder magnetischen Erscheinungen vorkommen. Diese Kräfte sind aber gewöhnlich wenig auffällig, weil sie schnell mit dem Abstande abnehmen, und sich deshalb nur unter besonders günstigen Umständen bei starker Annäherung der Kugeln aneinander deutlich geltend machen.

Andererseits ist aber dieses Resultat auch ein viel allgemeineres als dasjenige, welches in der Fernwirkungsformel 117 (c) enthalten war. Denn diese Formel enthielt nichts über die Kräfte temporärer Natur. In unserem neuen Resultate sind sie aber in ihrem vollen Umfange mitgerechnet. Denn die Dichten $\bar{e}$ und $\bar{e}'$ sind die freien, welche sich durch Verschiebung des Körpers im umgebenden Felde verändern, und welche auch auf der Oberfläche ursprünglich neu-

traler Körper entstehen, wenn sie in ein Feld gebracht werden. Die Übereinstimmungen, die wir durch unsere Versuche im neunten bis elften Abschnitt selbst unter sehr komplicierten Verhältnissen nachgewiesen haben zwischen hydrodynamischen und elektrischen oder magnetischen Fernkräften temporärer Natur, sind also nicht nur qualitative, oder innerhalb der ziemlich weiten Grenzen der Versuchsfehler bestehende Übereinstimmungen, sondern sind Übereinstimmungen, welche selbst bei der schärfsten mathematischen Prüfung bestehen bleiben.

So weit wir es haben verfolgen können, ist also die Analogie eine vollständig zusammenhängende. Sie ist direkt, solange es sich um die Felder, invers, wenn es sich um die ponderomotorischen Kräfte handelt.

# Siebenter Abschnitt.

## Einheiten und Dimensionen der elektrischen, der magnetischen und der hydrodynamischen Gröfsen.

**147. Formale Verschiedenheiten in den Darstellungsformen der elektrischen und magnetischen Erscheinungen.** — Sachlich Neues über die Analogie der hydrodynamischen Erscheinungen mit den elektrischen und magnetischen haben wir nicht weiter hinzuzufügen. Es empfiehlt sich aber, die Punkte noch genauer zu besprechen, wo wir in formaler Hinsicht von der gewöhnlichen Darstellung der Elektrostatik und des Magnetismus abgewichen sind.

Ein erster formaler Unterschied ist der, dafs wir den Potentialen das entgegengesetzte Vorzeichen von dem jetzt üblichen gegeben haben. Um mit dem Geschwindigkeitspotential in der Hydrodynamik volle Übereinstimmung zu erhalten, haben wir das Potential als eine Gröfse definiert, dessen positive Ableitungen die Komponenten der betreffenden Vektorgröfsen darstellen. In theoretisch-physikalischer Beziehung hat die eine Wahl vor der anderen weder wesentliche Vorteile noch Nachteile, da man ja jetzt die Potentiale nur als Rechengröfsen, und nicht mehr, wie wohl zum Teil früher, als physikalische Fundamentalgröfsen betrachtet.

Wesentlicher ist ein anderer Punkt. Die Übereinkunft, welche zu der Festsetzung der Einheiten führt, haben wir in anderer Weise getroffen, als dies gewöhnlich geschieht. Wir haben die HEAVSIDE-

schen „rationellen" anstatt die alten „irrationellen" Einheiten benutzt, und dies hat einer Reihe von Formeln ein anderes Aussehen als das angewöhnte verliehen.

Ein anderer nahe verwandter Unterschied ist auch vorhanden, doch meistens ohne sichtbare Spuren in dem Aussehen der Formeln zu hinterlassen. Wir haben nämlich diejenigen willkürlichen Übereinkünfte vermieden, welche zu dem traditionellen, und wie man mit vollem Rechte sagen kann, „irrationellen" Dimensionssystem für die elektrischen und magnetischen Gröfsen führen.

Wenn wir in dieser Weise von der traditionellen Darstellungsform abgewichen sind, so heben wir ausdrücklich hervor, dafs wir nichts Neues zu machen brauchten, in der Absicht, Ähnlichkeit mit den hydrodynamischen Erscheinungen zu erzwingen. Wir sind nur einzelnen hervorragenden Elektrikern, vor allem Oliver Heaviside, gefolgt, die sich bestrebt haben, neue und reinere Darstellungsformen zu finden, und zwar ohne eine Kenntnis von dieser hydrodynamischen Analogie zu haben.

**148. Die Relationen zwischen den Zahlen, welche dieselbe Gröfse in rationellen und in irrationellen Einheiten ausdrücken.** — Für die Festsetzung von Einheiten hat man, wie wir gesehen haben (112), zweimal eine Wahl zu treffen. Das eine Mal ist die Wahl geometrischer, das andere Mal physikalischer Natur. Wir betrachten zunächst nur die erste, die geometrische Wahl, welche allein dafür entscheidend ist, ob die Einheiten dem Typus der „rationellen" oder dem der „irrationellen" Einheiten angehören werden.

Zu den Einheiten des irrationellen Typus führt die folgende Überlegung:

Die zwischen zwei Polen wirkende Kraft ist eine Abstandskraft, und der im Wechselwirkungsgesetz auftretende fundamentale geometrische Parameter folglich der Abstand. Als Polintensität Eins wählen wir deshalb eine solche, welche einen Pol gleicher Intensität im Abstand Eins mit einer Kraft Eins angreift. Dies führt zu der Festsetzung des Wertes $c = 1$ für den im Wechselwirkungsgesetze auftretenden numerischen Faktor.

Zu den Einheiten des rationellen Typus gelangt man dagegen durch die folgende Überlegung:

Die Kraft ist eine Ausbreitungskraft, und der im Wechselwirkungsgesetze auftretende fundamentale Parameter folglich die Kugelfläche, über die sich die von dem einen Pol ausgehende Wir-

kung verbreitet hat, ehe sie sich dem anderen Pol geltend macht. Man setzt deshalb diese Kugelfläche gleich Eins, und dies führt zu der Festsetzung des Wertes $c = \frac{1}{4\pi}$ für den im Wechselwirkungsgesetze auftretenden numerischen Faktor.

Die eine oder die andere dieser Verfügungen ist noch nicht für die Definition konkreter Einheiten hinreichend. Es muſs auch die zweite Wahl getroffen werden, welche nicht mehr geometrischer, sondern physikalischer Natur ist, indem man festzusetzen hat, in welchem Medium die Kraft gemessen werden soll. Aber schon ohne eine solche konkrete Wahl zu treffen, können wir die Einheiten des rationellen und irrationellen Typus miteinander vergleichen, indem wir voraussetzen, daſs diese zweite, physikalische Wahl immer in derselben Weise getroffen wird, durch welche der obigen Übereinkünfte man auch die erste, geometrische Wahl entschieden hat.

Den Ausgangspunkt des Vergleiches gewinnen wir in der folgenden Weise.[1] Ein und dieselbe Kraft $F$, welche dieselben zwei Körper aus gleicher Entfernung aufeinander ausüben, drücken wir einmal durch die in rationellen Einheiten gemessenen Polintensitäten $\hat{E}$ und $\hat{E}'$, und einmal durch die in den irrationellen Einheiten gemessenen Polintensitäten $\hat{E}_i$ und $\hat{E}_i'$ aus. Dieses giebt die Gleichung:

$$(a) \qquad F = q\frac{\hat{E}\hat{E}'}{4\pi r^2} = q\frac{\hat{E}_i\hat{E}_i'}{r^2}.$$

Zwischen den Zahlen $\hat{E}$ und $\hat{E}_i$, welche eine und dieselbe Polintensität in den zwei Einheitssystemen ausdrücken, besteht also die Relation:

$$(b) \qquad \hat{E} = \sqrt{4\pi}\,\hat{E}_i.$$

Die Zahl, welche eine gegebene Polintensität in rationellen Einheiten ausdrückt, ist also $\sqrt{4\pi}$ oder rund 3,5 mal gröſser als die Zahl, welche sie in irrationellen Einheiten ausdrückt. Oder mit anderen Worten, die rationelle Einheit ist $\sqrt{4\pi}$ oder rund 3,5 mal kleiner als die irrationelle.

Aus der Gleichung (b) ergeben sich nun die folgenden, welche die Beziehung zwischen den Zahlen geben, welche freie Polintensitäten und freie oder wahre kubische oder flächenhafte Dichten in den zwei Einheitssystemen ausdrücken:

[1] Vergl. O. Heaviside, Electromagnetic Theory, Vol. 1, S. 123—126.

$$\bar{E} = \sqrt{4\pi}\,\bar{E}_i$$

(c)
$$\acute{e} = \sqrt{4\pi}\,\acute{e}_i \qquad \acute{e}' = \sqrt{4\pi}\,\acute{e}_i'$$

$$\bar{e} = \sqrt{4\pi}\,\bar{e}_i \qquad \bar{e}' = \sqrt{4\pi}\,\bar{e}_i'$$

Weiter ergeben sich für die aus den Ladungen durch Multiplikation mit einer Länge abgeleiteten Aktionsmomente und für die entsprechenden Aktionsintensitäten die folgenden Relationen, wobei wir für jede Vektorgröfse nur die Gleichung für die erste Komponente aufschreiben:

(d)
$$\dot{F} = \sqrt{4\pi}\,\dot{F}_i \qquad \dot{f} = \sqrt{4\pi}\,\dot{f}_i$$

$$\bar{F} = \sqrt{4\pi}\,\bar{F}_i \qquad \bar{f} = \sqrt{4\pi}\,\bar{f}_i$$

Bis jetzt hat also überall die Anwendung der rationellen Einheit $\sqrt{4\pi}$ mal gröfsere Zahlen als die Anwendung der irrationellen gegeben. Ein anderes Verhältnis tritt dagegen ein, wenn wir zu den Feldvektoren übergehen. Wenn $X$ die erste Komponente der mechanische Kraftn ist, welche eine wahre Ladung erleidet, so sind die entsprechenden Komponenten $\bar{u}$ und $\bar{u}_i$ der Feldintensität in den zwei Einheitssystemen durch die Gleichungen

(e)
$$\bar{u} = \frac{X}{\dot{E}}, \qquad \bar{u}_i = \frac{X}{\dot{E}_i}$$

definiert, und nach der zwischen den Ladungen $\dot{E}$ und $\dot{E}_i$ bestehenden Relation (b) wird:

(f)
$$\bar{u} = \frac{\bar{u}_i}{\sqrt{4\pi}}.$$

Hier giebt also die Anwendung der rationellen Einheit $\sqrt{4\pi}$ mal kleinere Zahlen, oder die rationelle Einheit ist $\sqrt{4\pi}$ mal gröfser als die irrationelle. Ganz ebenso verhält es sich mit der Polarisation

(g)
$$u = \frac{u_i}{\sqrt{4\pi}}$$

und mit dem Potential der Feldintensität:

(h)
$$\varphi = \frac{\varphi_i}{\sqrt{4\pi}}.$$

**149. Schema der wichtigsten Formeln in den zwei Einheitssystemen.** — Wenn man mit Hilfe der obigen Relationen die in den rationellen Einheiten ausgedrückten Gröſsen aus unseren früheren Formeln eliminiert, so kommt man zu dem traditionellen Formelsystem der Elektrostatik und des Magnetismus zurück. Wir stellen des bequemeren Vergleiches wegen die wichtigsten dieser Formeln zusammen.

In den Fernwirkungsformeln fällt bei der Anwendung der irrationellen Einheiten das in Verbindung mit $r$ auftretende $4\pi$ fort. Zunächst wird also das COULOMB'sche Gesetz [114 (c)]

$$F = \frac{\dot{E}\dot{E}'}{4\pi r^2} = \frac{\dot{E}_i \dot{E}_i'}{r^2}$$

und die entsprechende Kräftefunktion [115 (a)]:

$$\Psi = -\frac{\dot{E}\dot{E}'}{4\pi r} = -\frac{\dot{E}_i \dot{E}_i'}{r}.$$

Ganz entsprechend werden die mehr zusammengesetzten Kräftefunktionen (vergl. zweiten Abschnitt) bei der Anwendung der rationellen Einheiten Ableitungen von $\frac{1}{4\pi r}$, bei der Anwendung der irrationellen Einheiten dagegen Ableitungen von $\frac{1}{r}$ enthalten. Weiter wird die Formel [126 (b)], welche das Potential der Feldintensität durch die freien Dichten ausdrückt:

$$\varphi = -\int \frac{\bar{e}\, d\tau_1}{4\pi r_1} - \int \frac{\bar{e}'\, d\sigma}{4\pi r'} \qquad \varphi_i = -\int \frac{\bar{e}_i\, d\tau}{r_1} - \int \frac{\bar{e}_i'\, d\sigma}{r'}.$$

In den Formeln, welche die inneren Feldeigenschaften angeben, tritt das entgegengesetzte Verhältnis ein. Das $4\pi$ verschwindet, wenn man die rationellen Einheiten anwendet, tritt aber auf, wenn man die irrationellen benutzt. Die Beziehungen zwischen Polarisation und wahrer, zwischen Feldintensität und freier Ladung werden also:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \dot{e} \qquad \frac{\partial u_i}{\partial x} + \frac{\partial v_i}{\partial y} + \frac{\partial w_i}{\partial z} = 4\pi \dot{e}_i$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = \bar{e} \qquad \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}_i}{\partial z} = 4\pi \bar{e}_i.$$

Weiter die Formeln für die Dichte der freien Oberflächenschicht:

$$(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})_n - (\bar{U}, \bar{V}, \bar{W})_n = \bar{e}' \qquad (\bar{u}_i, \bar{v}_i, \bar{w}_i) - (\bar{U}_i, \bar{V}_i, \bar{W}_i) = 4\pi \bar{e}_i'.$$

Die Relation **128** (b) wird:

$$\bar{U}_i = \bar{U} + \bar{f} \qquad (\bar{U})_i = \bar{U}_i + 4\pi \bar{f}$$

Ist $\bar{f}$ ein temporäres Aktionsmoment, so dafs wir nach **140** (d) definitionsmäfsig

$$\bar{f} = \varkappa \bar{U} \qquad \bar{f}_i = \varkappa_i \bar{U}_i$$

haben, so ergiebt sich zufolge **148** (d) und (f):

$$\varkappa = 4\pi \varkappa_i .$$

Also wird die Relation zwischen Magnetisierungszahl und Polarisierbarkeit **140** (c):

$$K = k(1 + \varkappa) \qquad K = k(1 + 4\pi \varkappa_i).$$

Die einfache Bedeutung der Magnetisierungszahl $\varkappa$ als der relativen Überschufspolarisierbarkeit geht also im irrationellen Mafssystem ganz verloren.

Endlich wird der Ausdruck **143** (e) für die Energie im Felde:

$$W = \tfrac{1}{2}\int k\{\mathfrak{u}^2 + \mathfrak{v}^2 + \mathfrak{w}^2\}\, d\tau = \frac{1}{8\pi}\int k\{\mathfrak{u}_i^2 + \mathfrak{v}_i^2 + \mathfrak{w}_i^2\}\, d\tau .$$

Nimmt man einen Überblick über dieses Schema, so ergiebt sich das folgende Resultat:

Wenn man die rationellen Einheiten anwendet, so tritt das $4\pi$ nur in Verbindung mit dem Abstandsausdruck $r$ auf, also nur in Formeln, wo die Vorstellung von der kugelförmigen Ausbreitung einer Wirkung zu Grunde liegt.

Wenn man dagegen die irrationellen Einheiten anwendet, so kommt das $4\pi$ in allen möglichen anderen Formeln vor, nur n i c h t in denjenigen, welche mit der kugelförmigen Ausbreitung zu thun haben.

Dieses zeigt, dafs Heaviside mit vollem Recht das alte Einheitssystem als ein irrationelles bezeichnet hat. Und wenn man weitere Belege für die irrationelle Natur dieses Einheitssystems haben will, so braucht man nur die entwickelten irrationellen Formeln hydrodynamisch zu interpretieren.

Das $\bar{E}_i$ stellt dann im hydrodynamischen Falle eine Pulsationsintensität, das heifst eine Volumänderungsgeschwindigkeit dar, welche

nicht in der sonst für Volumänderungsgeschwindigkeiten gebräuchlichen Einheit $\frac{cm^3}{sec}$, sondern in einer $\sqrt{4\pi}$ oder 3,544807 ... mal grösseren Einheit ausgedrückt ist. Die aus $\acute{E}_i$ abgeleitete Aktionsintensität $(\acute{f}, \acute{g}, \acute{h})$ stellt eine Geschwindigkeit dar, aber wird nicht wie eine gewöhnliche Geschwindigkeit durch $\frac{cm}{sec}$ gemessen, sondern wieder durch eine 3,544807 ... mal grössere Einheit. Die aus $\acute{E}_i$ in anderer Weise abgeleitete Grösse $(\acute{u}, \acute{v}, \acute{w})$ stellt ebenfalls eine Geschwindigkeit dar, aber wird weder in der gewöhnlichen Einheit $\frac{cm}{sec}$ noch in der eben angewendeten grösseren, sondern in einer 3,544807 ... mal kleineren Einheit ausgedrückt. Ein Hydrodynamiker, welcher, den Spuren des Elektrikers folgend, die irrationellen Einheiten in die Hydrodynamik einführt, wird also zu der gleichzeitigen Anwendung von drei Einheiten für Geschwindigkeit kommen. Ein Punkt hat die Geschwindigkeit Eins sowohl, wenn er in der Sekunde 1 cm durchläuft, als wenn er 3,544807 ... cm durchläuft, wie endlich auch, wenn er $\frac{1}{3,544807}$ cm durchläuft. In genau derselben Weise werden drei Einheiten auf einmal nebeneinander für die Grössen von Feldintensitätsnatur angewendet.

Solange der Hydrodynamiker, wie jetzt der Elektriker, seine Grössen nur auf Umwegen messen kann, wird er nur die vorläufigen Merkmale der Irrationalität sehen, nämlich das absurde Auftreten von $4\pi$ in Formeln, wo es aus geometrischen Gründen nicht hingehört. Sobald er aber andere Wege für die Messung derselben Grössen kennen lernt, wird er auf den offenen Widerspruch stossen und sein Einheitssystem reformieren müssen.

Hieraus ist nun ein wichtiger Schluss zu ziehen. Denn wie tief oder wie oberflächlich die Analogie der hydrodynamischen Erscheinungen zu elektrischen und magnetischen ist, so sind die geometrischen Verhältnisse, welche für das Auftreten eines $4\pi$ in den Formeln entscheidend sind, identisch dieselben, und die Einheiten, welche in einem Falle irrationell sind, werden es auch im anderen Falle sein. Die irrationalle Natur des jetzt gebräuchlichen elektrischen Einheitssystems ist also zu vollster Evidenz bewiesen, und damit ist die Notwendigkeit einer Reform gegeben.

**150. Die relativen Massysteme.** — Die Festsetzung eines bestimmten Wertes für den numerischen Faktor im Ausdruck des COULOMB'schen Gesetzes ist, wie schon mehrmals hervorgehoben, nur ein erster Schritt zu der Festsetzung von konkreten Einheiten. Noch

eine zweite Wahl ist notwendig, nämlich die Wahl eines bestimmten Mediums, dessen ponderomotorische Aktivitätskonstante oder dessen Polarisierbarkeit man gleich Eins setzt. Und dabei ist vorausgesetzt, dafs der zu der Definition der Einheiten für Polintensität dienende Versuch eben in diesem Medium ausgeführt werden soll.

Jede solche Wahl führt zu einem relativen Einheitssystem für die elektrischen oder magnetischen Gröfsen, und zwar rationeller oder irrationeller Natur, je nach der früher getroffenen Verfügung über den numerischen Faktor. Jede Möglichkeit ist nämlich ausgeschlossen, diese zweite Verfügung in solcher Weise zu treffen, dafs man die durch die erste Verfügung eingeführte Irrationalität aufhebt. Denn die zwei Verfügungen sind absolut heterogener Natur, die erste eine geometrische, die zweite eine physikalische.

Wir haben uns im vorhergehenden nicht auf die Frage eingelassen, welches Medium in dieser Hinsicht den anderen vorzuziehen sei. Dieses ist auch nicht nötig, solange man sich mit rein theoretischen Untersuchungen beschäftigt. Man denkt sich, dafs man die einzige in letzter Hand befriedigende Wahl getroffen, also das Medium gewählt hat, dessen ponderomotorische Aktivitätskonstante, im Centimeter-, Gramm-, Sekunden-System absolut gemessen, den Wert Eins haben wird. Bei unserer völligen Unkenntnis der physikalischen Natur der Eigenschaft, welche die ponderomotorische Aktivitätskonstante, sei es im elektrischen, sei es im magnetischen Falle, vertritt, haben wir keinen Fingerzeig, wo das Richtige zu finden sei. Aus praktischen Gründen wählt man das Vakuum als Normalmedium, sowohl wenn man elektrostatische, als wenn man magnetische Messungen macht. Dafs heifst, in dem einen Falle setzt man die ponderomotorische Aktivitätskonstante des Vakuums für elektrische Fernkräfte, im anderen seine ponderomotorische Aktivitätskonstante für magnetische Fernkräfte gleich Eins. Die erste Übereinkunft führt zu dem elektrostatischen, die zweite zu dem magnetischen Mafssysteme. Die relative Natur dieser beiden Mafssysteme leuchtet aber sofort dadurch ein, dafs sie untereinander nicht übereinstimmen.

Der Zusammenhang wird völlig klar, wenn man das hydrodynamische Bild betrachtet. Die ponderomotorische Aktivitätskonstante ist hier einfach die Dichte der Flüssigkeit. Zu dem absoluten Mafssysteme wird der Hydrodynamiker also nur kommen, wenn er das Wasser als Fundamentalmedium wählt. Jede andere Wahl wird ein relatives Mafssystem geben. Er hat aber keine Anleitung, die einzig definitiv befriedigende Wahl zu treffen, solange

er nicht mehr über die hydrodynamischen Erscheinungen weifs, als der Elektriker über die elektrischen.

**151. Die irrationellen Dimensionssysteme.** — Die Dimensionen im absoluten Sinne des Wortes kennen wir nur für solche Gröfsen, die wir absolut messen können. Daraus folgt, dafs wir nichts über die absoluten Dimensionen der elektrischen und der magnetischen Gröfsen wissen. Das COULOMB'sche Gesetz [**114** (c)] enthält dimensionsmäfsig zwei Unbekannte, nämlich die Polintensität und die ponderomotorische Aktivitätskonstante des umgebenden Mediums, und giebt deshalb nur eine Relation zwischen den Dimensionen zweier unbekannter Gröfsen. Wenn man die fehlende Gleichung durch eine Hypothese über die Dimensionen einer der zwei Gröfsen ersetzt, kann man ein relatives Dimensionssystem für die elektrischen Gröfsen ableiten. In dieser Weise sind auch die traditionellen irrationellen Dimensionssysteme für elektrische und magnetische Gröfsen entstanden. Nur ist es im Anfang blindlings geschehen, da man zu der Zeit, wo man mit der Messung der elektrischen und magnetischen Gröfsen anfing, nichts über das Eingreifen des Mediums wufste.

Wenn man nämlich die Dimensionen der Polintensitäten ableitet, ohne auf den Faktor aufmerksam zu sein, welcher den Einflufs des Mediums darstellt, so läuft dies darauf hinaus, dafs man diesen Faktor dimensionslos macht. Und das heifst wieder, dafs man die Quadratwurzel der wirklichen Dimension dieser Konstante zu den wirklichen Dimensionen jeder der zwei wahren Polintensitäten hinzufügt. Man sieht dies sofort im hydrodynamischen Bilde. Die wahren Dimensionen der Pulsationsintensität sind diejenigen einer Volumausdehnungsgeschwindigkeit, also $L^3 T^{-1}$, und die wahren Dimensionen der hydrodynamischen ponderomotorischen Aktivitätskonstante sind diejenigen einer Dichte, also $M L^{-3}$, deren Quadratwurzel $L^{-\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}}$ ist. Fügt man diese Dimension zu denjenigen der Pulsationsintensität, so kommt man auf die irrationellen Dimensionen $L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}$, welche man der elektrischen Masse im elektrostatischen und der magnetischen Masse im magnetischen Mafssysteme beizulegen pflegt.

**152. Über rationelle Dimensionssysteme.** — Neben den zwei traditionellen irrationellen Dimensionssystemen kann man beliebig viele andere, formal gleichberechtigte Dimensionssysteme einführen,

indem man eine andere Verfügung über die Dimensionen der ponderomotorischen Aktivitätskonstante trifft und dabei selbstverständlich nur auf solche Verfügungen Rücksicht nimmt, welche zu rationellen Dimensionen sämtlicher Gröſsen führen. Zu diesen Dimensionssystemen gehört auch das hydrodynamische, zu dem man kommt, wenn man voraussetzt, daſs die elektrische, oder im Magnetismus die magnetische, ponderomotorische Aktivitätskonstante die Dimensionen einer Dichte hat. Wir stellen unten die Dimensionen der wichtigsten Gröſsen in diesen Systemen zusammen. Überall, wo die Masse $M$ in den Dimensionsformeln auftritt, fügen wir auch die Dimensionen zu, wo die Masse $M$ durch die Dichte $Q$ als Fundamentalgröſse ersetzt ist, denn der Sinn der Dimensionsformeln tritt dabei deutlicher hervor in allen Fällen, wo wir mit specifischen, oder auf die Einheit des Volumens bezogenen Gröſsen zu thun haben.

| | | |
|---|---|---|
| Ponderomotorische Aktivitätskonstante (Dichte) . . | $M L^{-3}$ | $Q$ |
| Polarisierbarkeit (Beweglichkeit oder sp. Volumen) | $M^{-1} L^{3}$ | $Q^{-1}$ |
| Wahre Masse (Volumänderungsgeschwindigkeit) . . | $L^{3} T^{-1}$ | |
| Freie Masse (Volumänderungsmoment) . . . . . | $M T^{-1}$ | $Q L^{3} T^{-1}$ |
| Wahre Dichte (sp. Volumänderungsgeschwindigkeit) | $T^{-1}$ | |
| Freie Dichte (sp. Volumänderungsmoment) . . . . | $M L^{-3} T^{-1}$ | $Q T^{-1}$ |
| Wahres elektrisches oder magnetisches Moment (kinematisches Aktionsmoment) . . . . . . . | $L^{4} T^{-1}$ | |
| Freies elektrisches oder magnetisches Moment (dynamisches Aktionsmoment) . . . . . . . . . | $M L T^{-1}$ | $Q L^{4} T^{-1}$ |
| Polarisation (Geschwindigkeit)<br>Wahre Aktionsintensität<br>Dichte der wahren Aktionsschicht . . . . . | $L T^{-1}$ | |
| Feldintensität (Bewegungsgröſse, Impuls)<br>Freie Aktionsintensität<br>Dichte der freien Aktionsschicht . . . . | $M L^{-2} T^{-1}$ | $Q L T^{-1}$ |

Dieses Dimensionssystem läſst sich in derselben Weise wie das irrationelle benutzen, beispielsweise bei der Umrechnung, wenn man eine Änderung an einer der Fundamentaleinheiten vornimmt. Dabei wird sich der Einfluſs einer Änderung in anderer Weise auf die einzelnen specifisch elektrischen oder magnetischen Gröſsen verteilen, als wenn man das gewöhnliche irrationelle Dimensionssystem anwendet. Die elektrischen oder magnetischen Gröſsen geben aber zu Messungen Anlaſs nur in solchen Kombinationen, wo sich der Unterschied der zwei Systeme kompensiert. Geht man beispiels-

weise zu der $n$-fachen Längeneinheit über, während die zwei anderen Fundamentaleinheiten ungeändert gelassen werden, so wird nach dem irrationellen System die Einheit sowohl der wahren wie der freien Masse auf das $n^{\frac{3}{2}}$-fache zunehmen, während nach dem hydrodynamischen System die Einheit der wahren Masse auf das $n^3$-fache zunimmt, die der freien dagegen unverändert bleibt. Da man aber bei dem COULOMB'schen Versuch nur das Produkt beider Massen messen kann, kompensieren sich die Unterschiede.

Bei solchen Umrechnungen würde das rationelle Dimensionssystem den praktischen Vorzug haben, daſs man das umständlichere Rechnen mit den gebrochenen Exponenten vermeidet. Aber daran schlieſst sich auch ein sehr wesentlicher theoretischer Vorteil. Denn das irrationelle Dimensionssystem macht keinen Unterschied zwischen Gröſsen mit so verschiedenen physikalischen Eigenschaften wie freie Masse und wahre Masse, freie Dichte und wahre Dichte, Polarisation und Feldintensität. Als Kontrollmittel, um Fehler in einer abgeleiteten Relation zu entdecken, wird deshalb das irrationelle Dimensionssystem versagen, wo das rationelle noch den Fehler hervortreten läſst.

Diese Vorteile werden die gelegentliche Benutzung des angegebenen Dimensionssystems völlig rechtfertigen. Es muſs aber hervorgehoben werden, daſs die Frage von der richtigen Rationalisierung der Dimensionen viel tiefer liegt, als die rein numerische Rationalisierung der Einheiten durch die veränderte Verfügung über den numerischen Faktor in COULOMB's Gesetz. Denn dabei handelt es sich um eine rein geometrische Frage, welche für die Entscheidung völlig reif ist. Die geometrischen Verhältnisse, welche hier entscheiden, sind im elektrischen, im magnetischen und im hydrodynamischen Falle identisch dieselben, und die Antwort muſs in allen Fällen dieselbe sein. Ganz anders dagegen, wenn es sich um die Dimensionen handelt. Hier ist die Frage eine physikalische, und die physikalischen Verhältnisse können in den drei Fällen nicht identisch sein. Denn nimmt man die bekannte zwischen elektrischen und magnetischen Gröſsen bestehende Beziehung zu Hilfe, so weist man leicht nach, daſs die elektrischen und die magnetischen Gröſsen nicht gleichzeitig die Dimensionen der hydrodynamischen Gröſsen haben können. Es können also höchstens entweder nur die elektrischen oder nur die magnetischen Gröſsen die angegebenen rationellen Dimensionen haben. Bei dieser Lage völliger Unsicherheit kann man sagen, daſs das irrationelle Dimensionssystem eben in seiner Irrationalität einen Vorzug hat; denn es kann nicht zu der

Aufstellung verfrühter Hypothesen über die physikalische Natur der elektrischen oder magnetischen Gröfsen verleiten. Die vollständige Aufklärung kann aber erst die Entdeckung eines neuen Naturgesetzes geben, welche noch eine Relation zwischen den zwei unbekannten Gröfsen in COULOMB's Gesetz giebt.

**153. Geschichtliches über die Entwickelung der Analogie.** — Die numerische und die dimensionsmäfsige Irrationalität des traditionellen elektrischen und magnetischen Mafssystems, in Verbindung mit der Unklarheit, welche früher über die Bedeutung der Dimensionen herrschte, bildete lange für C. A. BJERKNES ein schweres Hindernis für die volle und reine Erkennung der Analogie zwischen den hydrodynamischen Erscheinungen einerseits und den elektrischen und magnetischen andererseits. Die Resultate liefsen schon von Anfang an nicht verkennen, dafs in den grofsen Zügen eine merkwürdige Analogie vorhanden war, aber sie schien in der sonderbarsten Weise durch allerlei Kleinigkeiten getrübt zu sein. Dank den neueren Fortschritten in der Darstellung der Elektricitätslehre haben wir die Analogie hervortreten lassen können, ohne eine Änderung an irgend einer hydrodynamischen Formel vorzunehmen. C. A. BJERKNES ist dagegen ursprünglich den umgekehrten, damals leichteren Weg gegangen: er hat, um die Analogie zu erkennen, die Irrationalitäten der Elektricitätslehre in die hydrodynamischen Formeln eingeführt. Dies gelang durch eine einzige Substitution, welche die Grundlage seiner Diskussion der Analogie bildete. Der im Gesetze für die Fernkraft zwischen pulsierenden Kugeln vorkommende Faktor $q$, die Dichte der Flüssigkeit, wurde durch die Substitution

$$q = 4\pi\varrho^2$$

entfernt, und danach die Gröfsen

$$\dot{E}_i = \varrho\dot{E}, \quad \dot{E}_i' = \varrho\dot{E}'$$

eingeführt. Das Gesetz **114**(c) für die Fernkräfte zwischen pulsierenden Kugeln nimmt dann die Form

$$F = \frac{\dot{E}_i\dot{E}_i'}{r^2}$$

an, welche der traditionellen Form des COULOMB'schen Gesetzes entspricht, wo einerseits das $4\pi$ weggefallen, und andererseits der Faktor, welcher den Einflufs des Mediums angiebt, unterdrückt ist.

Die Grössen $\hat{E}_i$ und $\hat{E}_i'$ haben deshalb numerisch und dimensionenmässig die Irrationalitäten der elektrischen oder magnetischen Massen nach der alten Darstellungsform. Wenn man dann die Feldvorstellungen in ähnlicher Weise wie in der Elektricitätslehre einführt, so kommt man zu einer Beschreibung der hydrodynamischen Felderscheinungen mit Hilfe eines Systems von Grössen, welches genau dieselben numerischen und dimensionalen Irrationalitäten hat wie die entsprechenden Grössen der traditionellen Elektricitätslehre, und die hydrodynamischen Formeln nehmen dieselben äusseren Formen wie die entsprechenden elektrischen und magnetischen an.

# Rückblick und Schlufsbetrachtungen.

**154. Die Existenz scheinbarer Fernkräfte.** — Zum Schlufs blicken wir noch einmal zurück auf die Ziele, denen wir zugestrebt, und die Resultate, die wir erreicht haben.

In den Hauptzügen der historischen Entwickelung von C. A. Bjerknes' Forschungen folgend haben wir nach Erscheinungen mechanischer Natur gesucht, wo wirkliche Fernwirkungen ausgeschlossen waren, wo aber ein Beobachter mit beschränktem Wahrnehmungsvermögen solche Wirkungen zu sehen glauben würde. Wir wählten das einfachste Problem, durch dessen Lösung wir solche Resultate zu finden hoffen konnten. Als raumerfüllendes Medium wurde das in theoretischer Hinsicht möglichst einfache gewählt, die homogene, inkompressible, reibungslose Flüssigkeit, und es wurde angenommen, dafs sich in dieser Flüssigkeit Körper möglichst einfacher Form, das heifst von Kugelform, bewegen sollten. Andererseits wurde grofse Allgemeinheit durch die Voraussetzung angestrebt, dafs die Anzahl der Kugeln beliebig sein konnte.

Als erstes allgemeines Resultat ergab sich, dafs wirklich die Kugeln scheinbare Wirkungen in die Ferne aufeinander ausübten. Und zwar sind wir nicht bei einem blofsen Ergebnis der Rechnung stehen geblieben, sondern wir haben diesen scheinbaren Fernwirkungen vollkommen greifbare Form durch die Versuche geben können.

Zur Zeit, wo dieses Resultat gefunden wurde, herrschte noch allgemein die Lehre von den unvermittelten Fernwirkungen. Es zeigte sich, entgegen den herrschenden Anschauungen, dafs man

auch mit der Möglichkeit vermittelter Wirkungen in die Ferne rechnen müsse. Jetzt ist die Lehre von den unvermittelten Wirkungen in die Ferne im Prinzipe aufgegeben, ohne daſs man doch in einem einzigen Falle hat nachweisen können, wie die konkreten Fernwirkungen der Natur vermittelt werden. Diese Lücke kann unser Resultat bis jetzt auch nicht ausfüllen. Es zeigt aber in völlig konkreter Form, wie man sich eine solche Vermittelung denken kann, und dadurch ist in voller Evidenz nachgewiesen, daſs, wenn man die Vorstellung von vermittelten Fernwirkungen zu Grunde legt, diese neue Grundvorstellung an sich keine innere Unmöglichkeit enthält.

**155. Die allgemeinen Eigenschaften der scheinbaren Fernkräfte.** — Dem allgemeinen Resultate von der bloſsen Möglichkeit der scheinbaren Fernkräfte würde noch nicht ein so besonders groſser Wert beizulegen sein, wenn es sich sonst gezeigt hätte, daſs diese Fernkräfte mit ganz fremdartigen Eigenschaften aufgetreten wären, die sie scharf von den Fernkräften der Natur trennten.

Gerade das Entgegengesetzte ist aber der Fall. Beschränken wir uns auf die Fernwirkungen niederer Ordnung, welche sich am ersten dem Beobachter aufdrängen müssen, so haben sie genau dieselben allgemeinen Fundamentaleigenschaften, welche man den Kräften der Fernwirkungsmechanik zuschreibt. Eine eigentümliche Ausnahme bildet nur das Prinzip von der gleichen Wirkung und Gegenwirkung. Allgemein gültig ist dieses Prinzip für die hydrodynamischen Fernkräfte nicht; es wird aber als allgemein gültig erscheinen, weil es für die der Beobachtung allein zugänglichen Durchschnittswirkungen strenge Gültigkeit hat.

**156. Pulsierende Kugeln und Gravitation.** — Gehen wir zu den speziellen Eigenschaften spezieller hydrodynamischer Fernkräfte über, so fällt es in erster Linie auf, daſs es unter denselben auch eine giebt, welche nach dem fundamentalen Abstandsgesetz umgekehrt wie das Quadrat des Abstandes wirkt.

Der Gedanke an einen Vergleich dieser Kraft mit der allgemeinen Gravitation drängt sich dann von selbst auf. Eine formale Ähnlichkeit liegt auch insofern vor, als die Kraft nicht nur dem Abstandsgesetze folgt, sondern auch dem Produkt zweier, für die zwei Körper charakteristischen Parameter proportional ist. Diese Parameter sind aber im Falle der Gravitation einfach die trägen Massen der Körper. Im hydrodynamischen sind sie dagegen die

Pulsationsintensitäten, die relativ zu einander sowohl mit gleichen wie mit entgegengesetzten Vorzeichen auftreten können.

Ohne weiteres ergiebt sich somit keine vollkommene Analogie. Wohl aber kann man durch passende ergänzende Hypothesen eine solche erhalten. Denn wenn man solche Verhältnisse ersinnt, dafs die Pulsationsintensitäten der Körper ihren trägen Massen proportional werden, so mufs die hydrodynamische Fernkraft der Schwerkraft genau entsprechen.

Solche Verhältnisse lassen sich auch angeben, wie das folgende Beispiel zeigt. Man kann sich denken, dafs in der Flüssigkeit ein periodisch wechselnder Druck herrscht. Die in ihr schwimmenden Körper werden dann durch diesen Druck in Pulsationen gebracht. Bestehen nun alle Körper aus demselben Stoffe, so dafs sie pro Volumeinheit dieselbe Kompressibilität haben, so werden sie Pulsationsintensitäten annehmen, welche sich wie ihre Volumina verhalten. Und da sich die Volumina bei gleichem Stoffe wie die Massen verhalten, so wird die hydrodynamische Fernkraft dem Produkte der Massen direkt und dem Quadrate des Abstandes umgekehrt proportional sein.

Es ist dieses die von Arthur Korn aufgestellte Theorie der Gravitation.[1] Eine Kraft wie die Gravitation wird in unserem Sonnensysteme bestehen, wenn man annimmt, dafs der interplanetarische Raum mit einer inkompressiblen Flüssigkeit erfüllt ist, in welcher ein periodisch welchselnder Druck herrscht, und wenn man daneben die Annahme von der gleichmäfsigen Komprimierbarkeit der Atome der ponderablen Körper macht, um die Proportionalität der Kraft mit den Massen zu sichern. Einen Versuch, welcher diese Theorie illustriert, haben wir schon erwähnt (**46**).

Welchen Wert man einer Theorie wie dieser beilegen soll, darüber kann Meinungsverschiedenheit herrschen. Was aber nicht bestritten werden kann, ist, dafs unter den angegebenen Bedingungen eine scheinbare Fernkraft entsteht, welche genau die Eigenschaften der Schwerkraft hat. Und als Bild wird deshalb die Theorie ihren unbestreitbaren Wert haben, bis es gelingt, ein besseres zu finden.

**157. Die Analogie mit den elektrischen und den magnetischen Erscheinungen.** — Das Gesetz der pulsierenden Kugeln führt nicht nur zum Vergleich mit der Gravitation, sondern ohne weiteres auch

[1] Arthur Korn, Eine Theorie der Gravitation und der elektrischen Erscheinungen. Berlin 1896—98.

zum Vergleich mit den elektrischen und magnetischen Fernwirkungen nach dem COULOMB'schen Gesetze. Hier hat man den Vorteil, daſs sich die Pulsationsintensitäten ganz ungezwungen mit den elektrischen und magnetischen Massen vergleichen lassen. Gleichzeitig muſs man aber die verkehrte Richtung der Kraft in Kauf nehmen.

An und für sich braucht man deshalb dieser Analogie keinen gröſseren Wert als der mit der Gravitation zuzuschreiben. Die weitere Untersuchung der hydrodynamischen Fernkräfte zwingt uns aber bald, der Analogie mit elektrischen und magnetischen Erscheinungen, trotz ihrer inversen Natur, eine weit gröſsere Bedeutung beizulegen. Denn in ihrer erhabenen Einfachheit bietet die Gravitation nur zwei charakteristische Merkmale: das Abstandsgesetz und das der Proportionalität der Massen. Einen ganz anderen Reichtum an charakteristischen Eigentümlichkeiten besitzen dagegen die elektrischen und magnetischen Fernkräfte, und man kann sich schwerlich des Eindruckes erwehren, daſs es etwas zu bedeuten hat, wenn die rein objektive Untersuchung der hydrodynamischen Fernkräfte ungezwungen zu immer gröſserer Erweiterung der Analogie führt.

Noch mehr verstärkt sich dieser Eindruck, wenn man von den Fernkrafterscheinungen zu den Felderscheinungen übergeht. Die neueren Entdeckungen im Gebiete der Elektricität haben uns zu der Annahme gezwungen, daſs sich hinter den Fernwirkungen eine Erscheinungswelt ganz anderen Umfanges verbirgt. Die Fernwirkungen sind nur als höchst unwesentliche Folgen der Felderscheinungen aufzufassen. Ganz ähnlich verhält es sich aber auch in der Hydrodynamik. Denn hinter den Fernwirkungen liegen als Ursachen die Stromfelder. Und die hydrodynamischen Fernwirkungen sind von dem allgemeinen Standpunkte der Dynamik der Flüssigkeiten höchst unwesentliche Erscheinungen, sonst wären sie schon längst von den praktischen Hydraulikern entdeckt worden. Die Rippenbildung im Sande dürfte die einzige alltägliche Erscheinung sein, deren genaueres Studium zu der Entdeckung dieser Kräfte hätte führen können. Diese Rippenbildung längs den Küsten ist aber eine ebenso unwesentliche Seite der Mechanik des Weltmeeres, wie die Anziehung geriebener Körperchen eine unwesentliche Seite der heutigen Physik des Äthers ist.

Die Ähnlichkeit beschränkt sich aber nicht auf diese allgemeine Übereinstimmung, daſs Felderscheinungen beiderseits zu Grunde liegen; vielmehr besteht zwischen den hydrodynamischen und den

elektrischen oder magnetischen Feldern die genaueste Übereinstimmung, soweit wir die Sache haben untersuchen können. Und solange es sich um die Felder handelt, ist die Analogie nicht mehr invers, sondern direkt.

Was wir über die Analogie der hydrodynamischen Erscheinungen mit den elektrostatischen oder den magnetischen wissen, läfst sich also folgendermafsen zusammenfassen: Zwischen den Haupterscheinungen, nämlich den Erscheinungen der Felder, besteht absolute Analogie. Zwischen denjenigen Ausläufern beider Erscheinungskomplexe, welche wir als Wirkungen in die Ferne auffassen, besteht dagegen inverse Analogie.

**158. Zur Umkehrung der hydrodynamischen Fernkräfte.** — Von diesem Standpunkte aus gesehen erscheint der eigentümliche Gegensatz zwischen den hydrodynamischen Erscheinungen und den elektrischen oder magnetischen nicht mehr so besonders grofs, da er nur bei einer bestimmten Klasse von Nebenerscheinungen, dagegen nicht in den Haupterscheinungen auftritt. Greifen wir andererseits auf die elementare Ableitung der hydrodynamischen Fernwirkungserscheinungen zurück, so sehen wir, dafs die mittlere, progressiv bewegende Kraft immer auf einem kleinen Unterschiede entgegengesetzt gerichteter Antriebe beruht. Es läfst sich deshalb leicht denken, dafs schon geringfügige Umstände eine Änderung des Vorzeichens der kleinen Differenz herbeiführen könnten.

Die Umkehrung der Richtung einer Kraft ist auch an sich nichts Unmögliches oder Ungewöhnliches. Eine Kugel aus Holz fällt als Folge der Anziehung der Erde, wenn sie sich in der Luft befindet. Bringt man sie aber in Wasser, so steigt sie. Ein Beobachter, welcher das Wasser nicht sieht, würde glauben, eine von der Erde ausgehende abstofsende Kraft vor sich zu haben. Es läfst sich ähnlich denken, dafs die hydrodynamischen Fernkräfte durch eine Auftriebswirkung umgekehrt werden könnten, und zwar um so mehr, als sie zuletzt auf Wirkungen von Auftriebsnatur beruhen (2).

Eine Andeutung, wie eine Umkehr der Kraftrichtung zu stande kommen kann, haben wir schon im Anschlufs an Arthur Korn gegeben (18). Andere Wege scheinen sich aber auch darzubieten, und werden vielleicht von selbst zum Ziele führen, wenn man nur die Untersuchung der Dynamik der vorliegenden Aufgabe vollständig zu Ende führt. Dieses haben wir nämlich insofern nicht gethan, als wir uns auf die rein hydrodynamische Seite der Aufgabe beschränkt haben. Die hydrodynamischen Fernkräfte führen aber

unumgänglich zu Zusammenstöfsen der Körper, wie es sich bei der Ausführung der Versuche unaufhörlich zeigt. Mit den dynamischen Konsequenzen dieser Zusammenstöfse haben wir uns nicht beschäftigt, und wir werden diese umfassende Aufgabe hier nicht aufnehmen. Es sei aber auf eine Eigentümlichkeit der Zusammenstöfse synchron vibrierender Körper hingewiesen, welche in dieser Verbindung Interesse hat. Zwei gleich pulsierende Kugeln ziehen einander an. In demselben Augenblicke aber, als sie miteinander in Berührung kommen, werden sie äufserst heftig voneinander geschleudert, und zwar ist dieses der Fall, wie langsam und vorsichtig man auch die Annäherung stattfinden läfst. Genau umgekehrt ist dagegen das Verhalten der entgegengesetzt pulsierenden Kugeln. Erstens stofsen sie einander ab, und werden deshalb von selbst nicht leicht in Berührung kommen. Bringt man sie aber doch durch Gewalt in Berührung, so erfolgt kein solches Auseinanderschleudern, wie bei den gleich pulsierenden Kugeln. Die Erscheinung verläuft matt wie bei dem Zusammenstofse nicht vibrierender Körper. Ganz wie die pulsierenden verhalten sich die oscillierenden Kugeln. Stofsen sie mit den anziehenden Polen zusammen, so erfolgt ein heftiges Auseinanderschleudern. Mit den abstofsenden Polen geben sie dagegen nur einen matten Stofs. Diese Eigentümlichkeit des vibratorischen Stofses wird in der Richtung der Umkehr der Kraft wirken müssen, wenn man vibrierende Systeme betrachtet, die sich in vibrierenden Systemen befinden.

Andere allgemeine Andeutungen über die Möglichkeit einer Umkehrung, und über die Wege, auf welchen man sie suchen kann, geben die folgenden Überlegungen. Wir haben gesehen, dafs man den Gegensatz zwischen den hydrodynamischen Erscheinungen und den elektrischen oder magnetischen auch so ausdrücken kann: Die Energie des hydrodynamischen Stromfeldes ist kinetische, die des elektrischen oder des magnetischen Feldes dagegen potentielle Energie. Dieses ist keine Erklärung der Ursache des Gegensatzverhältnisses zwischen den elektrischen und den hydrodynamischen Fernkräften; es ist nur eine andere Formulierung der Thatsache. Denn ob zuletzt ein wirklicher Unterschied zwischen kinetischer und potentieller Energie besteht, wissen wir nicht. Die kinetische Energie eines Systems kann als die potentielle Energie eines anderen damit verbundenen Systems auftreten, und stellt man sich auf den Standpunkt der Hertz'schen Mechanik, so ist potentielle Energie immer die kinetische Energie verborgener Massen. Dies giebt aber dann auch gleich ein allgemeines Prinzip, nach welchem man von

den hydrodynamischen Kräften zu Kräften entgegengesetzter Richtung gelangen kann. Denn denkt man sich solche Verbindungen, dafs die Energie der Flüssigkeit als potentielle Energie der sichtbaren Massen auftritt, so werden zwischen diesen Massen Kräfte wirken, welche den elektrischen und magnetischen direkt analog sind.

**159. Über Bilder.** — Die Frage nach der Umkehr der hydrodynamischen Fernkräfte ist vor allem dann von Interesse, wenn man um jeden Preis gleich ein vollständiges mechanisches Bild der elektrostatischen oder der magnetischen Erscheinungen konstruieren will. Es ist aber wichtig, hier zwischen zwei Aufgaben und Forschungsmethoden weit verschiedener Art zu unterscheiden.

Eine Aufgabe ist die der Konstruktion eines Bildes. Der direkteste Weg wäre dann, erst in irgend einer Weise, wie angedeutet, eine Umkehr der Richtung der hydrodynamischen Kräfte zu erzielen, und dann durch molekulartheoretische Konstruktionen weiter zu schreiten. Denn durch passende Übereinkünfte über die Gröfsen und Abstände der Moleküle erreicht man, dafs auch der andere Unterschied, dem wir begegnet sind, völlig zurücktritt. Dieser Unterschied beruht auf der Existenz von hydrodynamischen Fernkräften hoher Ordnung, welche in der Starrheit der Kugeln ihren Ursprung haben (92), und für die wir kein Analogon bei den elektrischen und den magnetischen Erscheinungen haben. Ein solches Bild würde sein Interesse haben und von Nutzen sein können, aber allerdings auch von Schaden. Denn mit der Gefahr, dafs man den Wert seiner Konstruktion überschätzt, mufs immer gerechnet werden. Es ist in dieser Verbindung vielleicht nicht überflüssig, an die bewundernswerten, aber doch zusammengebrochenen Konstruktionen eines Demokrit oder Descartes zu erinnern. Denn wieviel wir auch seit ihrer Zeit an thatsächlichem Wissen über die Naturerscheinungen fortgeschritten sind, so ist der Unterschied vielleicht doch nicht so grofs, wie wir gern glauben möchten.

Eine Aufgabe ganz anderer Art ist dagegen das systematische Aufsuchen von ähnlichen Erscheinungen aus getrennten Erscheinungsgebieten, die kritische Prüfung und die rein phenomenologische Beschreibung der gefundenen Ähnlichkeiten. Das Resultat unserer Untersuchungen zeigt durch ein konkretes Beispiel, dafs man nach dieser Forschungsmethode Bilder finden kann, ohne sie konstruieren zu brauchen. Dies dürfte ein wichtiger Fingerzeig für künftige Forschungen sein.

Das Bild, welches wir gefunden haben, ist allerdings negativ, also von dem Charakter eines Spiegelbildes. Aber ein negatives Bild ist auch ein Bild; es kann denselben Nutzen wie ein positives haben, und gleichzeitig ist man gegen jede Überschätzung des Wertes des Bildes geschützt, da man es nicht mit dem Gegenstande verwechseln kann.

Der Unterschied, den man besonders zu beseitigen wünscht, ist ja nicht so grofs, dafs man die hydrodynamischen Erscheinungen nicht unter einem Gesichtspunkte mit den elektrischen oder magnetischen beschreiben könnte, nur dafs gewisse Formeln mit einem doppelten Vorzeichen auftreten. Dabei ist es möglich, das vollständig klare, in allen Einzelheiten verständliche hydrodynamische Bild zur Veranschaulichung hinzuzuziehen. Seine negative Natur bildet dafür kein Hindernis. Die für Anfänger sonst nicht leicht greifbare moderne Elektricitätslehre nimmt in diesem negativen Bilde vollkommen verkörperlichte Form an. Und dabei läuft man nicht Gefahr, dafs der Schüler glaubt, die Mechanik der elektrischen Erscheinungen entschleiert vor sich zu haben. Denn gegen Ausschweifungen dieser Art bildet die negative Natur des Bildes eine ganz zuverlässige Garantie.

Handelt es sich andererseits nicht mehr um Unterricht, sondern um Forschung, so kann das Bild, negativ wie es ist, auch den Elektriker bei der Aufstellung neuer Aufgaben leiten. Wir werden die Aufmerksamkeit auf eine solche richten, deren Stellung ohne die Hilfe des Bildes vielleicht nicht so leicht gewesen wäre.

Die MAXWELL'schen Gleichungen beschreiben lange noch nicht die elektromagnetischen Erscheinungen in der Vollständigkeit, in welcher die EULER'schen Gleichungen die Bewegung der reibungslosen Flüssigkeiten darstellen. Denn die MAXWELL'schen Gleichungen geben nur die rein geometrische Beschreibung der elektromagnetischen Felder. Um die ponderomotorische Kraft abzuleiten, mufs man fremde Prinzipien zu Hilfe nehmen. Entweder zieht man das Prinzip von der Erhaltung der Energie heran, oder man benutzt auch die MAXWELL'sche Drucktheorie, die in keinem organischen Zusammenhange mit den MAXWELL'schen Gleichungen steht, und deren Wert übrigens auch bestritten wird. Die EULER'schen hydrodynamischen Gleichungen leisten dagegen alles. Sie geben die geometrische Beschreibung der Stromfelder, und gestatten aufserdem, die bewegenden Kräfte zu berechnen, welche die in den Stromfeldern befindlichen Körper erleiden. Wir können aber unsere Forderungen in der Elektricitätslehre nicht niedriger als in der

Hydrodynamik stellen, und eine Zukunftsaufgabe gröfster Wichtigkeit ist also die folgende: Ein Gleichungssystem aufzufinden, welches alle elektrischen und magnetischen Erscheinungen umfafst, und folglich die ponderomotorischen Kräfte als dem elektromagnetischen Erscheinungskomplexe organisch zugehörig beschreibt, anstatt sie wie jetzt als einen getrennten Anhang nach besonderen Methoden zu behandeln.

**160. Zur Ursache der Analogie.** — Hinter der Frage nach den Bildern und ihrer praktischen Verwertung erhebt sich aber eine andere von ungleich gröfserer Wichtigkeit: Warum besteht diese Ähnlichkeit zwischen hydrodynamischen Erscheinungen und den elektrischen oder magnetischen? Denn niemand wird sich durch die Erklärung befriedigt finden, dafs eine Analogie von dieser Ausdehnung und von dieser Schärfe auf einem Zufall beruht. Sie mufs ihre Ursache in irgend einer formalen oder realen Verwandtschaft zwischen den zwei Klassen von Erscheinungen haben, sei es, dafs hinter den elektrischen oder magnetischen Erscheinungen ein Mechanismus steckt, welcher wesentliche Züge mit dem von uns studierten Mechanismus gemein hat, sei es, dafs wir uns über die Ursachen noch keine Vorstellungen machen können.

Um Klarheit über dieses Rätsel zu finden, wird es kaum mehr als einen Weg geben: fortgesetzte Forschungen nach demselben Plane, welcher zu der Entdeckung der Analogie geführt hat. Wir haben unsere Methode derjenigen der vergleichenden Sprachwissenschaft oder der vergleichenden Anatomie an die Seite gestellt. Aus zwei verschiedenen Erscheinungsgebieten haben wir ein Material von ähnlichen Erscheinungen herausgefunden, welches so umfassend ist, dafs man es nicht mehr dem Zufall zuschreiben kann, sondern auf einen Zusammenhang irgend welcher Art schliefsen mufs. Die Art des Zusammenhanges läfst sich noch nicht erkennen, dazu mufs erst mehr Material gleicher Art beschafft werden. Man mufs immer allgemeinere Aufgaben lösen, beispielsweise durch die Betrachtung von Körpern anderer Formen als der Kugelform, und durch Übergang zu anderen Medien als die ideale Flüssigkeit, wie etwa zu den reibenden Flüssigkeiten oder den transversal-elastischen Medien. Man mufs dabei untersuchen, ob es eine Grenze giebt, jenseits welcher die Analogie nicht bestehen kann, oder ob sie sich ungezwungen weiter ausdehnt. Man mufs feststellen, ob sie vielleicht andere Formen annimmt, ob sie unter gewissen Bedingungen vom negativen zum positiven Bilde übergeht, oder ob mehr oder weniger

verwandte Erscheinungen Analogien geben, welche mehr umfassend sind, ohne die direkte Fortsetzung der hier entwickelten Analogie zu bilden. Ein hinlänglich grofses Material dieser Natur wird zuletzt die Art des formalen oder realen Zusammenhanges klarstellen, genau wie die Resultate der vergleichenden Anatomie, wenn alle Ähnlichkeiten und Gegensätze dargelegt, und alle Übergangsformen erforscht sind, die Stammbäume der getrennten Tierklassen hervortreten lassen.

---

# Sachregister zu Band I—II.

(Die Ziffern beziehen sich auf die Seitenzahlen.)

# Verzeichnis durchgehend benutzter Bezeichnungen.

**(Die Hinweise beziehen sich auf die Seitenzahlen, wo die betreffenden Gröſsen definiert sind.)**

$a, b, c$ — Koordinaten des Mittelpunktes einer Kugel; $d$ — Radius der Kugel } Koordinaten einer Kugel (I, 25).

$\dot a, \dot b, \dot c$ — Geschwindigkeitskomponenten des Mittelpunktes; $\dot d$ — Verlängerungsgeschwindigkeit des Radius } Geschwindigkeitskomponenten einer Kugel (I, 25).

$\dot a_e, \dot b_e, \dot c_e$ — Komponenten der energetischen Geschwindigkeit (I, 136).

$\dot a_i, \dot b_i, \dot c_i$ — „ „ inducierten „ (I, 136).

$\dot a_p, \dot b_p, \dot c_p$ — „ „ permanenten „ (I, 184).

$\dot a_t, \dot b_t, \dot c_t$ — „ „ temporären „ (I, 184).

$\bar a = q \dot a, \bar b = q \dot b, \bar c = q \dot c, \bar d = q \dot d$ — Feldintensität (I, 140).

$\bar A = Q \dot a_i, \bar B = Q \dot b_i, \bar C = Q \dot c_i, \bar D = Q \dot d_i$ — Feldintensität (I, 140).

$\ddot a, \ddot b, \ddot c$ — Beschleunigungskomponenten des Mittelpunktes der Kugel (I, 132).

$\dot\alpha, \dot\beta, \dot\gamma$ — Geschwindigkeitskomponenten im Parallelstrome (I, 71); auch die quadratischen Mittelwerte dieser Geschwindigkeitskomponenten (I, 192).

$\ddot\alpha, \ddot\beta, \ddot\gamma$ — Beschleunigungskomponenten im Parallelstrome (I, 168).

$\dot\alpha_\alpha, \dot\beta_\beta, \dot\gamma_\gamma, \dot\beta_\gamma = \dot\gamma_\beta, \dot\gamma_\alpha = \dot\alpha_\gamma, \dot\alpha_\beta = \dot\beta_\alpha$ — die deformativen Geschwindigkeiten (I, 73. 75); auch die quadratischen Mittelwerte dieser Geschwindigkeiten (I, 192).

$E$ — Volumen einer Kugel (I, 27).

$\dot E$ {
- Volumänderungsgeschwindigkeit einer Kugel (I, 27).
- Quadratischer Mittelwert der Volumänderungsgeschwindigkeit oder Pulsationsintensität der Kugel (I, 31).
- Wahre elektrische Masse (II, 212).
- „ magnetische Polintensität (II, 212).

$\ddot E$ {
- Volumänderungsmoment oder Pulsationsmoment (I, 160).
- Freie elektrische Masse (II, 220).
- „ magnetische Polintensität (II, 220).

$\dot e$ {
- Volumänderungsgeschwindigkeit oder Pulsationsintensität pro Volumeinheit (I, 27).
- Wahre kubische Dichte der Elektricität (II, 245).
- „ „ „ des Magnetismus (II, 245).

$\bar{e}$
- Volumänderungsmoment oder Pulsationsmoment pro Volumeinheit (I, 159).
- Freie kubische Dichte der Elektricität (II, 241).
- „ „ „ des Magnetismus (II, 241).

$\bar{e}'$
- Dichte der freien hydrodynamischen Aktionsschicht (I, 156. 159. 175. 181).
- Dichte der freien elektrischen Aktionsschicht (II, 241).
- „ „ „ magnetischen „ (II, 241).

$\dot{F}, \dot{G}, \dot{H}$
- Komponenten des kinematischen (wahren) Aktionsmomentes (I, 39. 44. 97).
- Komponenten des wahren elektrischen Momentes (II, 224).
- „ „ „ magnetischen „ (II, 224).

$\dot{f}, \dot{g}, \dot{h}$
- Komponenten der Aktionsgeschwindigkeit (I, 50. 96).
- „ des wahren elektrischen Momentes pro Volumeinheit (II, 246).
- Komponenten der wahren Magnetisierungsintensität (II, 246).

$\bar{F}, \bar{G}, \bar{H}$
- Komponenten des dynamischen (freien) Aktionsmomentes (I, 157).
- „ „ freien elektrischen Momentes (II, 224).
- „ „ „ magnetischen „ (II, 224).

$\bar{f}, \bar{g}, \bar{h}$
- Komponenten der Aktionsintensität (I, 157).
- „ des freien elektrischen Momentes pro Volumeinheit (II, 241).
- Komponenten der freien Magnetisierungsintensität (II, 241).

$k$
- Spezifisches Volumen oder Beweglichkeit der Flüssigkeit (II, 220).
- Elektrische Polarisierbarkeit des umgebenden Mediums (II, 220).
- Magnetische „ „ „ „ (II, 220).

$K$
- Spezifisches Volumen oder Beweglichkeit einer Kugel (II, 265. 271).
- Elektrische Polarisierbarkeit eines Körpers (II, 261).
- Magnetische „ „ „ (II, 261).

$L, M, N$ — Komponenten eines Drehungsmomentes (I, 211; II, 286).

$M$ — Masse einer Kugel (I, 132).

$\mathfrak{M}$ — Effektive Masse einer Kugel (I, 248).

$p$ — Druck in der Flüssigkeit (I, 19).

$q$
- Dichte der Flüssigkeit (I, 19).
- Ponderomotorische Aktivitätskonstante des umgebenden Mediums für elektrische Fernkräfte (II, 214).
- Ponderomotorische Aktivitätskonstante des umgebenden Mediums für magnetische Fernkräfte (II, 214).

$Q$
- Dichte einer Kugel (I, 135).
- Ponderomotorische Aktivitätskonstante eines Körpers für elektrische Fernkräfte (II, 265).
- Ponderomotorische Aktivitätskonstante eines Körpers für magnetische Fernkräfte (II, 265).

$r$ — Radius Vektor (I, 26).

$r_{kg}$ — Centralabstand der zwei Kugeln $k$ und $g$ (I, 249).

$\dot{S}$ — Aktionsmoment (Komponenten $\dot{F}, \dot{G}, \dot{H}$, vergl. oben).

$\bar{S}$ — „ ( „ $\bar{F}, \bar{G}, \bar{H}$, vergl. oben).

